



CENTRE DE RECHERCHES EN ÉCONOMIE ET DROIT
Paris Center for Law and Economics



CRED WORKING PAPER *N°* 2021-2

Primaires électorales : La fin du bipartisme dans les pays
européens ?

January 19, 2021

MARIE-NOËLLE LEFEBVRE*

*CRED(TEPP) - Université Paris II. Email : marie-noelle.lefebvre@u-paris2.fr

1 Introduction

Si les démocraties européennes sont majoritairement multipartites, on a pu constater dans plusieurs pays d'Europe une tendance plus ou moins forte au bipartisme ([Grunberg and Haegel \(2007\)](#)). Cependant, depuis quelques années, on remarque un déclin de cette tendance, notamment en France, en Espagne ou au Portugal. L'ébranlement des logiques bipartisanes a de nombreuses explications politiques et sociales. Néanmoins, d'après ce que nous savons de l'état de la littérature aucun travaux n'analyse l'incidence possible de la récente mise en place de primaires électorales dans les pays concernés sur ce phénomène. Ce papier propose d'apporter un éclairage théorique sur la relation qui existe entre la mise en place de primaires et l'étiollement des forces bipartisanes. En se concentrant uniquement sur le coût en terme de positionnement politique, nous montrons que la mise en place d'élections primaires peut conduire à l'affaiblissement des partis de gouvernement et l'apparition de nouveaux partis.

D'après [Sartori \(2005\)](#), on qualifie un système politique comme bipartisan lorsqu'il existe une possibilité d'alternance et qu'un seul parti (ou famille politique) peut obtenir suffisamment de voix pour être à la tête du gouvernement. C'est le cas de la France, de l'Espagne, de la Grèce ou du Portugal, où on constate que deux partis ont réussi à dominer la vie politique en s'imposant comme la seule alternative crédible. L'expression même de *partis de gouvernement* révèle la réalité du duopole mis en place par les partis dominants dans un contexte multi-partisan. Les partis européens *de gouvernement* ont progressivement perdu leurs soutiens populaires, en raison de leur gestion politique de la crise économique de 2008, mais également en raison de l'émergence de partis plus populistes. En réaction à l'érosion de leur base électorale, ces partis ont tenté de rassembler leurs militants autour d'élections internes appelées primaires.

Deux types d'élections primaires se sont développées depuis leur mise en place en Europe. Dans un premier temps, des primaires ont été organisées afin de rassembler les partisans et sympathisants autour d'un candidat charismatique après l'élaboration d'un programme politique par le parti. Par la suite, les partis ont utilisé les primaires pour définir à la fois le candidat et le programme qui seront soutenus par le parti. Nous nous concentrons uniquement sur ce deuxième type de primaires. Cette étude s'inscrit dans la littérature étudiant l'effet des primaires sur les performances électorales des partis en dehors du cadre électoral étasunien. Certains travaux montrent que les pri-

maires peuvent exposer de nouveaux candidats et réconcilier les préférences politiques des partisans, des militants et de l'élite du parti (Serra (2011)). D'autres montrent que les primaires peuvent être utiles pour résoudre les divisions au sein du parti, qui apparaissent souvent après de mauvais résultats électoraux (Kemahlioglu, Weitz-Shapiro and Hirano (2009)). Cependant, il n'est pas clair que les primaires constituent une prime électorale en termes de crédibilité pour le parti. Les conclusions sur leurs conséquences sont mitigées (Ichino and Nathan (2013)).

Le modèle Hotelling-Downs de compétition électorale (Hotelling (1929); Downs (1957)) offre un cadre d'analyse dont la simplicité n'enlève en rien la pertinence pour comprendre les enjeux du positionnement des partis ou candidats pour remporter une élection. Nous conservons les principales hypothèses sur lesquelles ce modèle repose. Les partis (ou candidats) choisissent leur position sur un axe horizontal unidimensionnel gauche-droite uniquement dans le but de remporter l'élection (et non par idéologie). Les électeurs ne peuvent voter que pour un seul candidat. Ils choisissent de voter pour le candidat dont le positionnement est le plus proche de leur idéologie politique. Notre modèle est un jeu à trois périodes. Les candidats s'engagent dans la compétition électorale de façon séquentielle. À la première période, le parti au pouvoir annonce sa position. On suppose qu'il défend son bilan. Sa position est donc exogène. À la seconde période, le parti d'opposition choisit sa position. Le choix de son positionnement peut être centralisé par l'appareil partisan ou sujet d'une primaire. À la dernière période, un nouveau parti peut choisir de se présenter à l'élection. Enfin l'élection a lieu. Si le parti au pouvoir et le parti d'opposition sont restreints à choisir une position sur leur segment historique (gauche ou droite), le nouveau parti reste libre de se positionner où il le souhaite.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au positionnement du parti d'opposition lorsqu'il est décidé au sein du parti de façon centralisée. Le parti d'opposition choisit de se positionner de façon à remporter l'élection en veillant à empêcher qu'un nouveau parti ne se présente. En effet, les partis dominants ont intérêt à protéger la tendance bi-partisane, à la fois car elle est synonyme d'alternance et également car elle leur assure un grand nombre de postes réservés à l'opposition. Seul le parti d'opposition peut remplir ce rôle, dans la mesure où le positionnement du parti au pouvoir est déterminé par son bilan, donc de façon exogène. Cette assertion permet à notre modèle

de se distinguer des modèles de concurrence électorale existants traitant du problème des nouveaux partis entrant ([Brams and Straffin Jr \(1982\)](#), [Palfrey \(1984\)](#), [Weber \(1992\)](#), [Osborne \(1993\)](#)). Notre résultat reste cependant proche de leurs conclusions respectives : le parti d'opposition peut toujours trouver une position qui lui assure la victoire tout en bloquant l'entrée d'un concurrent.

Dans un second temps, nous examinons comment le résultat précédent est affecté par la mise en place d'élections primaires dans le parti d'opposition d'après les hypothèses suivantes. Quand le parti d'opposition annonce qu'il organise une primaire, tous les candidats qui souhaitent se présenter doivent annoncer leur programme simultanément. Le programme (la position) défendu par le parti sera celui du vainqueur de la primaire. Les candidats à la primaire sont supposés myopes et se concentrent uniquement sur leur victoire à la primaire. Pour étudier l'incidence du nombre de candidats se présentant à la primaire sur les chances de victoire du parti d'opposition, nous examinons des équilibres multi-candidats. En cela, notre papier s'inscrit dans la littérature traitant des problèmes de compétition spatiale en présence de plusieurs agents ([Eaton and Lipsey \(1975\)](#), [Denzau, Kats and Slutsky \(1985\)](#)). Nous montrons alors que la mise en place d'une primaire réduit les chances de victoire du parti d'opposition et augmente la probabilité qu'un nouveau parti se présente et remporte l'élection.

Les résultats électoraux français, espagnols, grecs et portugais peuvent illustrer nos résultats théoriques. En effet, ces pays ont été parmi les premiers pays européens à mettre en place des primaires électorales¹. Tous ont également connu une remise en cause de la domination de leurs partis de gouvernement.

Ce papier s'articule de la façon suivante : dans un premier temps nous définissons le cadre d'analyse théorique (section 2), puis en guise de conclusion, nous discutons des résultats électoraux de la Grèce, l'Espagne, le Portugal et la France à la lumière de nos résultats théoriques (section 3).

2 Modèle théorique

Notre cadre d'analyse s'inscrit dans la tradition des modèles dits Hotelling-Downs ([Hotelling \(1929\)](#), [Downs \(1957\)](#)). Dans un premier temps, nous examinons la straté-

1. L'Italie a également été un pays précurseur. En 2005 la coalition de gauche organise une grande primaire ouverte. Cependant, nous ne sommes pas convaincu de l'existence d'une logique bi-partisane en Italie.

gie de positionnement des partis de gouvernement pour empêcher un nouveau parti de gagner dans le cas où le parti d'opposition centralise le choix du positionnement et désigne lui-même un candidat. Dans cette première partie, nous étudions des équilibres déterministes dans la mesure où nous cherchons la position qui permet au parti de remporter l'élection. Dans un second temps, nous introduisons une élection primaire au sein du parti d'opposition. Nous examinons l'incidence de cette primaire sur la stabilité du système bipartite. Les candidats se présentent à la primaire s'ils ont une probabilité non nulle de la remporter. Nous étudions alors des équilibres probabilistes.

2.1 Modèle de concurrence électorale

Les étapes du jeu. Supposons qu'il existe deux partis de gouvernement. Ce sont les deux partis dominants, ancrés dans le jeu politique et institutionnalisés. L'un est au pouvoir. Il joue le premier. Sa position est exogène. Cette hypothèse s'appuie sur le fait que le parti au pouvoir s'enracine tout au long de son mandat et défend son bilan. Sans perte de généralité, nous supposons ici qu'il s'agit du parti de droite. Le deuxième parti défie le premier, il représente la principale opposition (parti de gauche). En plus des deux partis établis, un troisième parti peut également se présenter, en fonction de la position des deux premiers. Ce troisième parti ne se présente que s'il a une probabilité non nulle de gagner l'élection. Une fois tous les partis positionnés, l'élection a lieu. Il n'y a qu'un tour.

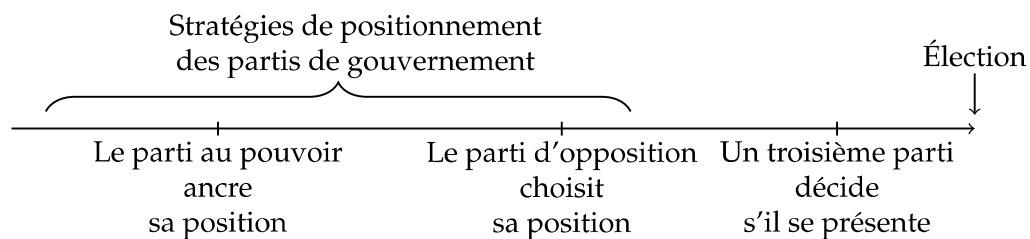


FIGURE 1 – Les étapes du jeu

Principales hypothèses. Les trois candidats sont désignés par les lettres L , R et N . Les lettres L et R sont les candidats des partis dominants : L se présente pour le parti de gauche et R pour le parti de droite. N est le candidat du troisième et nouveau parti. Les candidats choisissent leur position sur un axe horizontal gauche-droite. Cet espace

de stratégie continu est normalisé sur un intervalle réel fermé $I = [0; 1]$. Les trois candidats choisissent leur position afin de maximiser leurs votes. Leurs positions respectives sont désignées par x_L ; x_R ; x_N . Deux candidats ne peuvent pas choisir exactement la même position, mais peuvent choisir des positions infiniment proches. Le candidat de gauche ne peut choisir qu'une position à gauche du candidat de droite : $x_L < x_R$. Le nouveau parti, n'ayant pas encore d'étiquette politique, peut choisir la position qu'il veut sur I .

Il y a un continuum d'électeurs. Il n'y a pas d'abstention. Les positions idéologiques des électeurs sont distribuées de façon uniforme. Chaque électeur a une position idéologique $x \in I$ et ne peut voter que pour un seul candidat. Par conséquent, l'électeur médian se situe à la position $x_m = \frac{1}{2}$. Chaque électeur vote pour le candidat dont la position est la plus proche de sa position idéologique. Si la position d'un électeur est à égale distance de deux positions contiguës x et x' tel que $x < x'$ et si plusieurs candidats (deux au moins) optent pour une position infiniment proche de la position de l'électeur, alors il vote pour le candidat dont l'identité politique est la plus à gauche (respectivement à droite), s'il est placé à gauche (respectivement à droite) de la position x ; il vote avec la même probabilité pour l'un quelconque des candidats positionnés en x s'il est lui-même positionné en x .

Le candidat ayant obtenu le plus grand nombre de voix l'emporte. Si n candidats ont le même nombre de voix, chacun d'eux a une probabilité $\frac{1}{n}$ de gagner.

Notons x_i les positions qui sont finalement choisies par les candidats. L'indice i indique la place du candidat. Les x_i sont rangés de gauche à droite dans un ordre croissant avec i . En d'autres termes, plus la valeur de i est élevée, plus la position du candidat est éloignée à droite de l'intervalle I . En gardant cette notation à l'esprit, nous pouvons calculer le nombre de votes V_i associés à chaque position x_i . Ils sont donnés par le lemme suivant.

Lemme 1. Pour tout $n \geq 2$, et tout $i \in \{1, \dots, n\}$ le nombre de votes associé à la position x_i d'un équilibre garantissant un nombre de voix strictement supérieur à 0 est égal à :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} & \text{si} & & i = 1 \\ V_i &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} & \text{si} & & i \in \{2, \dots, n-1\} \\ V_n &= 1 - \frac{x_{n-1} + x_n}{2} & \text{si} & & i = n \end{aligned}$$

Démonstration. Voir Annexe A.1

□

2.2 Alternance et stabilité du bipartisme

Dans cette première sous section nous examinons les stratégies de positionnement des partis dominants pour empêcher le nouveau parti de gagner sans élections primaires.

Nous cherchons toutes les valeurs possibles de x_L , sachant la valeur de x_R , qui empêchent N de gagner. N ne se présente que s'il a une probabilité non nulle de gagner. Nous recherchons donc les valeurs de x_L qui satisfont l'inégalité suivante :

$$V_N < \text{Max}\{V_L; V_R\}$$

Lemme 2. Les paires de position des partis dominants (x_R, x_L) qui permettent de faire obstacle à un nouveau parti et d'assurer au parti d'opposition la victoire sont les solutions du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x_L < \frac{2-x_R}{3} \\ x_L > x_R - \frac{2}{3} \\ x_L > 2 - 3x_R \\ x_L > 1 - x_R \end{cases} \quad (1)$$

Démonstration. Voir Annexe A.2

□

La résolution graphique 2 représente la solution du système d'inégalités 1.

Le triangle blanc représente toutes les paires de positions (x_R, x_L) qui assurent à L la victoire. Le long de la frontière $x_L = 1 - x_R$, L et R ont une probabilité égale de gagner. En dessous de cette ligne, dans le triangle gris, R gagne .

Toutes les zones colorées représentent toutes les paires de positions (x_R, x_L) qui permettent à N de se présenter et gagner l'élection.

Proposition 1. Si $x_R \leq \frac{1}{2}$ alors le nouvel entrant se présente et gagne l'élection.

On remarque dans un premier temps que lorsque le parti de droite défend une position sur le segment de gauche, c'est-à-dire entre $x_R \in [0, \frac{1}{2}]$, le nouveau parti peut toujours trouver une position qui lui permet de gagner l'élection. En effet, en se positionnant à gauche, le parti au pouvoir restreint les possibilités de positionnement du parti d'opposition et laisse ainsi à sa droite assez d'espace pour qu'un nouveau

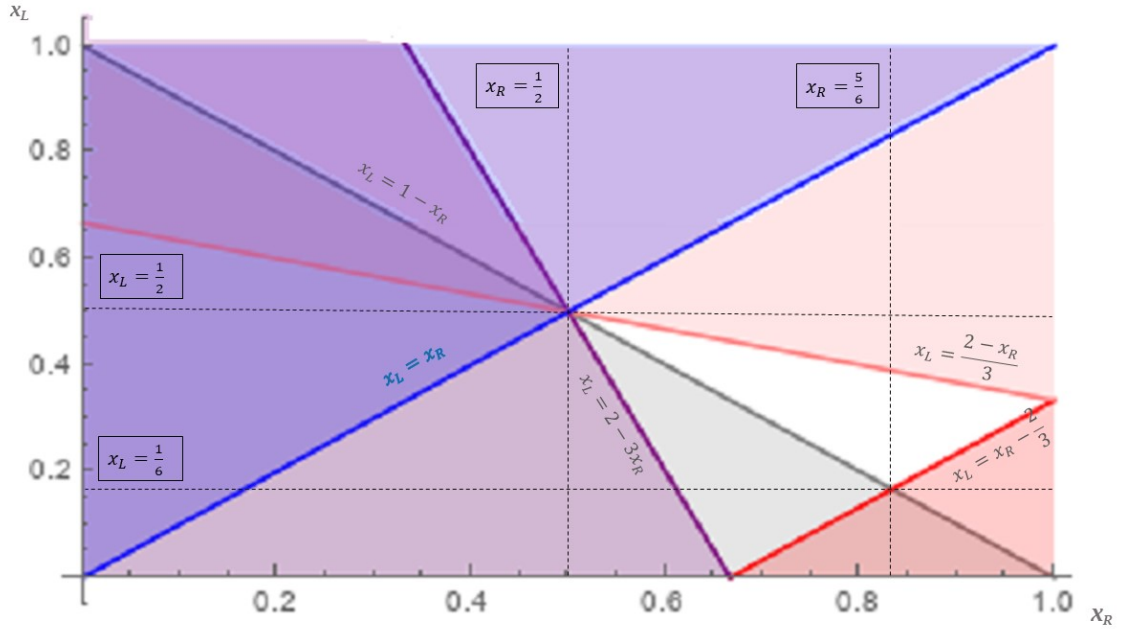


FIGURE 2 – Stratégies de positionnement du parti d’opposition

parti entre dans la compétition électorale et la remporte. On remarque également que s’il défend une position trop à droite $x_R > \frac{5}{6}$ il n’a aucune chance de réélection. Pour avoir une probabilité non nulle d’être réélu il doit défendre une position comprise entre $[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$, que nous pouvons qualifier de modérée.

Proposition 2. Lorsque le choix de positionnement du parti d’opposition est centralisé par le parti, et que $x_R \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors le parti d’opposition peut toujours trouver une position lui assurant la victoire.

On remarque que s’il existe toujours une position permettant à L de remporter l’élection, l’intervalle des possibles est réduit à $x_L \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ ². Ce résultat suggère de manière intéressante que la menace d’un nouveau venu oblige le parti d’opposition à choisir un programme modéré. Cet intervalle fournit une explication théorique de la stabilité d’une bipolarisation gauche-droite modérée.

La proposition 2 souligne que la position de premier joueur du parti d’opposition lui confère un avantage stratégique pour remporter chaque élection.

On peut alors se demander pourquoi le candidat sortant accepte d’organiser des élections. Lorsque le jeu se répète, si aucun autre parti ne rentre dans la compétition

2. [Brams and Straffin Jr \(1982\)](#) avaient déjà évoqué cette limite de $\frac{1}{6}$.

électorale, le sortant représente, après sa défaite, la nouvelle opposition et remportera l'élection suivante.

Nos propositions dépendent fortement du caractère déterministe de notre modèle. Elles nous donnent cependant un premier cadre d'analyse afin de mieux comprendre l'impact des primaires sur la stabilité des régimes bipartites.

2.3 Introduction d'une primaire au sein du parti d'opposition

Nous regardons à présent ce qu'il se passe quand le choix du positionnement du parti d'opposition est soumis à une élection primaire. On considère dans notre papier des primaires de type *programmative*. Il s'agit de primaires à la suite desquelles le programme du candidat élu devient le programme du parti pour l'élection générale.

Principales hypothèses. Les candidats annoncent leur candidature à la primaire et choisissent leur position simultanément. Notons x_{Li} les positions choisies par les candidats. Les positions choisies sont forcément sur le segment alloué au parti de gauche en fonction de la position du parti de droite, on a donc $x_{Li} \in [0; x_R[$. Si les candidats ne peuvent pas se mettre exactement à la même position, ils peuvent choisir des positions infiniment proches. Les candidats ne se présentent que s'ils ont autant de chances de gagner la primaire que leurs concurrents. Les candidats aux élections primaires sont myopes, ce qui signifie qu'ils choisissent leur positionnement uniquement dans le but de gagner la primaire, sans penser à l'élection générale. Les électeurs à la primaire sont tous les électeurs dont la position idéologique est à gauche de la position du parti de droite soit sur l'intervalle $[0; x_R[$.

Résolution. n candidats se présentent à l'élection primaire avec une probabilité $\frac{1}{n}$ de remporter l'élection.

Lemme 3. Lorsqu'un nombre pair de candidats se présente à la primaire, il existe un unique équilibre permettant à chacun d'entre eux d'avoir la même probabilité de remporter l'élection tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \quad x_{2i-1} \simeq x_{2i} = \frac{2i-1}{n} x_R$$

Démonstration. Voir Annexe A.3

□

Lemme 4. Lorsqu'un nombre impair de candidats se présente à la primaire, il n'existe pas d'équilibre permettant à chacun d'entre eux d'avoir la même probabilité de remporter l'élection.

Démonstration. Voir Annexe A.4 □

Nous nous restreignons donc à étudier le cas des primaires avec un nombre de candidats pair.

Proposition 3. A la suite d'une élection primaire à n candidats, le parti d'opposition adoptera la position $x_{Li} = \frac{2i-1}{n}x_R$ avec une probabilité $p = \frac{2}{n}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$.

Afin de donner une intuition graphique de l'incidence des primaires sur la probabilité de victoire du parti d'opposition, nous représentons dans la figure 3 les positions x_L générées par une primaire à 2, 4 et 6 candidats. D'après la proposition 1, on sait que lorsque $x_R < \frac{1}{2}$, le nouveau parti remporte l'élection principale. Nous nous concentrons donc uniquement sur l'intervalle $x_R \in [\frac{1}{2}, 1]$.

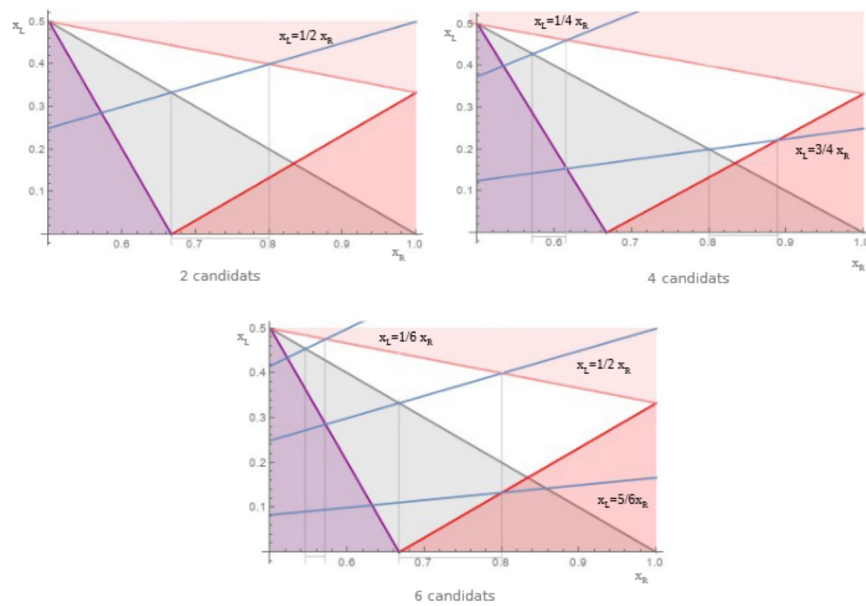


FIGURE 3 – Positionnement du parti d'opposition en fonction du nombre de candidats à la primaire

Les paires de position (x_R, x_L) générées par la primaire sont représentées par les lignes bleues. L gagne lorsque les lignes bleues se situent dans le triangle blanc, R

gagne lorsqu'elles se situent dans le triangle gris, N se présente et remporte l'élection dans toutes les autres situations. On remarque que ni R ni L ne sont en situation de gagner l'élection avec certitude. En supposant un tirage aléatoire uniforme de la position x_R , on peut alors calculer la probabilité de victoire de chaque candidat en fonction du nombre de candidats à la primaire du parti d'opposition.

On note :

- T_L (resp. T_R , resp. T_N) l'ensemble des couples $(x_R, x_L) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ pour lesquels L (resp. R , resp. N) remporte l'élection générale avec certitude;
- $D_i(n)$ la droite d'équation $x_L = \frac{2i-1}{n}x_R$ dans le plan (x_R, x_L) ;
- $Q_i^Z(n) = \{x_R : (x_R, x_L) \in D_i(n) \cap T_Z\}$, avec $Z \in \{L, R, N\}$.

T_L (resp. T_R , resp. T_N) correspond à l'intérieur du triangle blanc (resp. à l'intérieur du triangle gris, resp. au complément dans $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ de la réunion des triangles blanc et gris) de la figure 3.

On vérifie immédiatement sur la figure 3 que $Q_i^L(n)$ (resp. $Q_i^R(n)$, resp. $Q_i^N(n)$) est la réunion d'une famille, éventuellement vide, d'intervalles disjoints ouverts dans $[\frac{1}{2}, 1]$. Cet ensemble correspond à l'ensemble des positions x_R du parti de droite garantissant la victoire de L (resp. R , resp. N) lorsque le vainqueur de la primaire est positionné en $x_{Li} = \frac{2i-1}{n}x_R$.

Lemme 5. On suppose que la position du parti de droite est une variable aléatoire, de loi de probabilité uniforme continue sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$. Alors, pour tout nombre pair de candidats à la primaire de gauche n donné, $n \geq 2$, la probabilité de victoire du parti Z , $Z \in \{L, R, N\}$, est $p_Z(n) = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda(Q_i^Z(n))$, où $\lambda(Q_i^Z(n))$ est la somme des longueurs des intervalles dont la réunion forme $Q_i^Z(n)$. En particulier, $p_L(n) + p_R(n) + p_N(n) = 1$ pour tout n pair $n \geq 2$.

Démonstration. Voir Annexe A.5. □

Le lemme 5 nous permet de calculer la probabilité de victoire de chaque candidat en fonction du nombre de candidats qui se présente à la primaire du parti d'opposition. Ces probabilités sont représentées dans la figure 4 pour n entier pair compris dans $[2, 22]$.

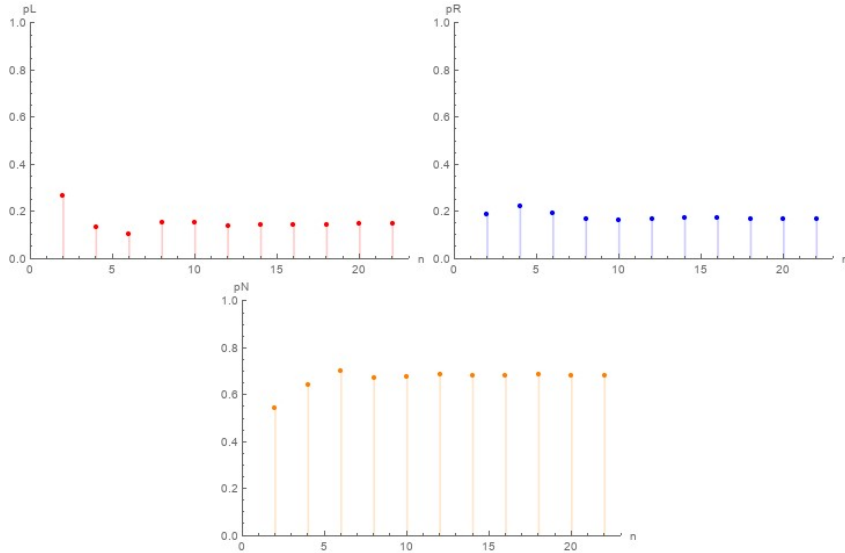


FIGURE 4 – Probabilité de remporter l’élection générale pour le candidat d’opposition (à gauche), le candidat sortant (à droite) et le nouvel entrant (en bas) en fonction du nombre de candidats à la primaire

Sans primaire, le parti d’opposition avait une probabilité de gain égale à 1. L’organisation d’une primaire dans le but de déterminer sa position entraîne une forte réduction de sa probabilité de gain et ce quelque soit le nombre de candidats qui se présentent à la primaire. De plus, on voit que la probabilité pour le nouvel entrant de remporter l’élection augmente considérablement.

Proposition 4. Lorsque le parti d’opposition organise des primaires dans le but de déterminer le programme qui sera défendu par le parti, sa probabilité de remporter l’élection générale est fortement diminuée et la probabilité qu’un nouvel entrant remporte l’élection s’accroît quelque soit le nombre de candidats qui se présentent à la primaire.

3 Discussion et Conclusion

Notre modèle a pour vocation d’offrir un éclairage théorique sur l’effet de la mise en place de primaires sur la stabilité des systèmes bipartites. Pour ce faire, nous construisons un jeu séquentiel permettant de comprendre comment s’instaure l’alternance de deux partis dominants dans un contexte où la possibilité pour un nouveau parti de se présenter est prise en considération. Nous montrons alors qu’il est toujours possible

pour le parti d'opposition, lorsqu'il choisit sa position de façon centralisée, de remporter l'élection tout en empêchant un nouveau parti de rentrer dans la compétition électorale.

Grâce à la base de données en accès libre *ParlGov*,³ nous avons examiné tous les résultats des élections législatives des pays d'Europe occidentale depuis la seconde guerre mondiale. Nous avons identifié quatre pays dont les résultats électoraux illustrent bien l'établissement d'une alternance de deux partis majoritaires dans un contexte institutionnel multi-partisans. Il s'agit de la Grèce, l'Espagne, le Portugal et la France.

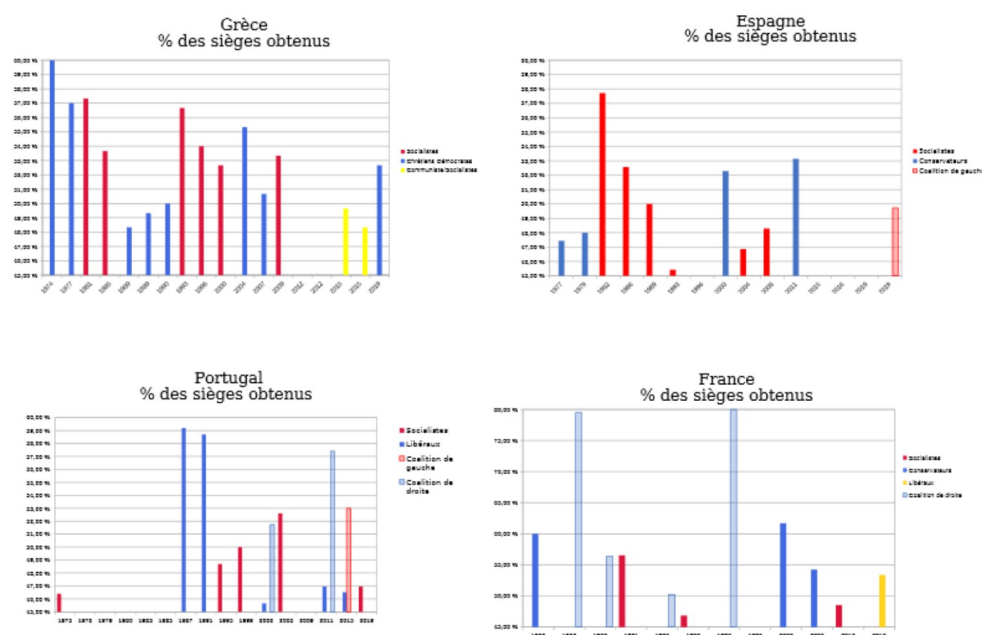


FIGURE 5 – Scores aux élections législatives des partis majoritaires - D'après les données de programme *ParlGov*

La figure 5 représente les résultats aux élections législatives des partis ayant obtenu plus de 45% des sièges de la chambre basse, à partir de l'instauration de la période démocratique contemporaine pour la Grèce, l'Espagne et le Portugal et de la *V^{me}* République pour la France. En obtenant 45% des sièges, ces partis ont donc pu former un gouvernement, soit avec une majorité absolue, soit avec une majorité relative. Sur les graphiques de la Grèce et de l'Espagne on visualise bien l'alternance systématique entre un parti socialiste et un parti conservateur ou chrétien démocrate. Au Portugal

3. Döring, Holger and Philip Manow. 2019. Parliaments and governments database (ParlGov) : Information on parties, elections and cabinets in modern democracies. Development version

l'alternance met plus de temps à s'instaurer. On note cependant qu'à partir des élections de 1987 les socialistes et les libéraux formeront un duopole au sein du paysage politique portugais. Le cas de la France est un peu plus particulier car les résultats législatifs sont à mettre en perspective avec les résultats des élections présidentielles. On observe toutefois une alternance entre les socialistes et les partis de droite.

Dans la seconde partie de notre modèle, nous considérons que le parti d'opposition choisit désormais son positionnement politique par le biais d'une primaire électorale. Les électeurs qui votent pour la primaire sont tous les électeurs dont le positionnement idéologique se situe à gauche (resp. à droite) de la position du parti de droite (resp. de gauche) sortant. On peut donc considérer qu'il s'agit ici de primaires dites ouvertes. En effet, notre modèle ne prend pas en compte l'appareil partisan et ne limite pas le nombre d'électeurs à la primaire.

Les partis socialistes grec, espagnol, portugais et français sont parmi les premiers partis européens à expérimenter des primaires ouvertes (ou semi-ouvertes pour le parti socialiste espagnol). Tous ont organisé une primaire lorsqu'ils étaient dans l'opposition (exception faite du parti socialiste français en 2017). En France, le parti conservateur a également organisé une primaire en 2016 lorsqu'il représentait la principale opposition.

Le Mouvement socialiste panhellénique (PASOK) est le premier parti socialiste européen à organiser une primaire ouverte en 2004. Il s'agit cependant plutôt d'un vote de soutien populaire que d'une primaire dans la mesure où un seul candidat se présente : George Papandréou. Le PASOK organisera cependant par la suite en novembre 2007, en réponse à sa défaite aux élections législatives de septembre, une vraie primaire où se présenteront trois candidats. George Papandréou défend alors à nouveau un programme proche du centre gauche alors que son principal opposant Evangelos Venizelos cherche à se positionner plus à gauche⁴. George Papandréou remporte à nouveau la primaire et mène son parti à la victoire lors des législatives de 2009⁵. Cette victoire sera cependant la dernière du PASOK. En effet, depuis 2004, le PASOK est concurrencé à sa gauche par la Coalition de la gauche radicale (SYRIZA) qui finira par

4. On comprend le positionnement des candidats à l'aide de la transcription du discours de Evangelos Venizelos lors de la 12ème session du Conseil National du PASOK, le 6 octobre 2007 sur son blog <http://evenizelos.blogspot.com/2007/10/>

5. Les élections législatives de 2009 ont été convoquées après la dissolution de l'assemblée par la droite au pouvoir dont la majorité était trop instable.

remporter les élections en 2015.

Chronologiquement, le second parti socialiste à organiser des primaires est le parti socialiste français en octobre 2011. Ces primaires avaient pour objet de désigner le candidat socialiste à l'élection présidentielle de 2012. Six candidats se présentent à la primaire. Les électeurs doivent élire le candidat qui défendra le programme du parti socialiste appelé *Le Changement* adopté par le parti avant la primaire⁶. François Hollande sort vainqueur de cette primaire et remportera par la suite l'élection présidentielle de 2012. Le parti socialiste remportera également l'élection législative suivante.

Viennent ensuite en 2014, les primaires des partis socialistes espagnol et portugais. En Espagne, à la suite des élections de 2011, le parti socialiste (PSOE) se retrouve dans l'opposition. En 2014, son leader Alfredo Pérez Rubalcaba démissionne mais prône une régénération du parti. Il réclame l'organisation d'une primaire semi-ouverte dans le but d'élire le candidat qui représentera le parti aux élections législatives de 2015. Trois candidats se présentent à l'élection primaire, dont José Antonio Perez Tapias qui incarne l'aile gauche radicale et Pedro Sanchez qui représente l'aile modérée du parti. Pedro Sanchez remporte confortablement la primaire. Les élections législatives de 2015 marquent un tournant dans la vie politique espagnole. Tous les médias parlent alors de la fin possible du bipartisme⁷. En effet, ni le parti socialiste, ni le parti conservateur ne réussissent à dégager une majorité. Deux nouveaux partis entrent au parlement, le parti libéral Ciudadanos et le parti d'extrême gauche Podemos.

Au Portugal, au lendemain des élections européennes de 2014, le maire de Lisbonne António Costa demande la démission du secrétaire général du parti socialiste portugais António José Seguro. Ce dernier refuse de démissionner mais organise une confrontation politique : une primaire ouverte. António Costa et António José Seguro sont les deux seuls candidats. La victoire d'António Costa met fin à trente ans de confrontation charismatique au sein du parti socialiste portugais (PS)⁸. À la tête de la coalition de gauche, le PS remporte l'élection législative de 2015 et se maintient au pouvoir en 2019.

Les années 2016 et 2017 sont le théâtre de trois élections primaires relativement

6. cf. <https://www.nouvelobs.com/politique/20110528.OBS4112/le-ps-adopte-son-projet-pour-2012.html>

7. Voir le court reportage d'Euronews par exemple : <https://fr.euronews.com/2015/12/15/espagne-la-fin-du-bipartisme-est-proche>

8. Cf. <https://www.publico.pt/2014/06/01/portugal/noticia/costa-e-seguro-enfrentamse-ha-30-anos-mas-desta-vez-e-a-serio-1638044>

hors du commun. En Espagne, après deux élections législatives dont les résultats ne permettent pas la formation d'un gouvernement (décembre 2015 et juin 2016), le PSOE connaît de fortes divisions en son sein. Pedro Sanchez est favorable à une coalition avec Podemos alors qu'une majorité des membres de la direction ne soutient aucune négociation. Pedro Sanchez démissionne de son poste de secrétaire général, laissant ainsi les conservateurs former un gouvernement. Le PS doit tout de même organiser de nouvelles élections primaires pour élire son nouveau secrétaire général. En mai 2017, trois candidats se présentent dont Pedro Sanchez et Susana Diaz qui est contre toute alliance avec Podemos. Pedro Sanchez remporte à nouveau l'élection primaire. Il lui faudra cependant arriver en tête aux deux élections législatives suivantes (avril 2019 et novembre 2019) pour parvenir à entériner une alliance avec Podemos lui permettant de gouverner.

En France, depuis la victoire de François Hollande, le parti conservateur Les Républicains (LR) représente la principale opposition. En 2016, il décide d'organiser des primaires pour désigner leur candidat à la présidentielle de 2017. Sept candidats se présentent, ils incarnent des positions politiques extrêmement différentes à droite du spectre politique⁹. François Fillon sort gagnant de cette primaire mais n'arrivera qu'en troisième position à l'élection présidentielle derrière la candidate d'extrême droite Marine Le Pen et le candidat du nouveau parti libéral Emmanuel Macron. Lors de l'élection législative suivant l'élection présidentielle, le parti du nouveau candidat La République en Marche (LRM) s'installe à l'Assemblée avec une majorité confortable.

En conclusion, les résultats théoriques prédits par notre modèle ne semblent pas invalidés par les faits politiques exprimés ci-dessus. Au contraire, il apparaît que lorsqu'un parti d'opposition organise des primaires *programmatiques*, comme ce fut le cas pour les partis socialistes grec et espagnol et le parti conservateur français, il n'arrive pas à dégager un positionnement lui permettant de remporter l'élection. De plus, on remarque que leur défaite est souvent en faveur d'un nouveau parti.

9. Cf. <https://www.leparisien.fr/faits-divers/l-essentiel-de-leur-programme-au-crible-19-11-2016-6346767.php>

Références

- Brams, Steven J and Philip D Straffin Jr**, "The entry problem in a political race," in "Political equilibrium," Springer, 1982, pp. 181–195.
- Denzau, A, A Kats, and S Slutsky**, "Multi-Agent Equilibria with Market Share and Ranking Objectives," *Social Choice and Welfare*, 1985, pp. 95–117.
- Downs, Anthony**, "An economic theory of political action in a democracy," *Journal of Political Economy*, 1957, 65 (2), 135–150.
- Eaton, B Curtis and Richard G Lipsey**, "The principle of minimum differentiation reconsidered : Some new developments in the theory of spatial competition," *The Review of Economic Studies*, 1975, 42 (1), 27–49.
- Grunberg, Gérard and Florence Haegel**, "Le bipartisme imparfait en France et en Europe," *Revue internationale de politique comparée*, 2007, 14 (2), 325–339.
- Hotelling, Harold**, "Stability in Competition," *The Economic Journal*, 1929, 39 (153), 41–57.
- Ichino, Nahomi and Noah L Nathan**, "Do Primaries Improve Electoral Performance? Clientelism and Intra-Party Conflict in Ghana," *American Journal of Political Science*, 2013, pp. 428–441.
- Kemahlioglu, Ozge, Rebecca Weitz-Shapiro, and Shigeo Hirano**, "Why primaries in Latin American presidential elections?," *The Journal of Politics*, 2009, 71 (1), 339–352.
- Osborne, Martin J**, "Candidate positioning and entry in a political competition," *Games and Economic Behavior*, 1993, 5 (1), 133–151.
- Palfrey, Thomas R**, "Spatial Equilibrium with Entry," *The Review of Economic Studies*, 1984, pp. 139–156.
- Sartori, Giovanni**, *Parties and party systems A framework for analysis*, ECPR Press Classic, 2005.
- Serra, Gilles**, "Why primaries? The party's tradeoff between policy and valence," *Journal of Theoretical Politics*, 2011, 23 (1), 21–51.

Weber, Shlomo, "On hierarchical spatial competition," *The Review of Economic Studies*, 1992, 59 (2), 407–425.

Annexe

Primaires électorales : La fin du bipartisme dans les pays européens?

A Modèle théorique

A.1 Preuve Lemme 1

Démonstration. On a $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ à l'équilibre par hypothèse.

Rappelons que chaque électeur vote pour le candidat dont la position est la plus proche de sa position idéologique.

Cas 1. On s'intéresse d'abord au cas $i = 1$

On remarque tout d'abord qu'au plus deux candidats, le candidat 1 inclus, choisissent la position x_i . En effet, dans le cas contraire, c'est à dire $x_1 \simeq x_2 \simeq x_k$, $k > 2$, alors $v_2 = 0$. Le seul électeur qui est susceptible de voter pour le candidat 2 est alors l'électeur positionné en x_2 , et il vote pour celui-ci avec une probabilité $\leq \frac{1}{3}$.

Supposons que $x_1 \simeq x_2$. Les électeurs positionnés à gauche du candidat $i = 1$ votent nécessairement pour ce dernier (aucun ne dispose d'une offre politique alternative plus proche de sa position en tant qu'électeur). L'électeur positionné en $x_1 \simeq x_2$ vote avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ pour le candidat 1 ou le candidat 2. On a donc

$$V_1 = \int_0^{x_1} dx = x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

.

Si $x_1 < x_2$, les électeurs positionnés sur le segment $[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$ s'ajoutent aux précédents, et l'électeur positionné en $\frac{x_1+x_2}{2}$ vote avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ pour le candidat 1 ou le candidat 2. On a donc

$$V_1 = \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} dx = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

.

Cas 2. On examine à présent le cas $i \in \{2, \dots, n-1\}$

On remarque en premier lieu que l'on ne peut avoir $x_{i-1} \simeq x_{i+1}$, car on aurait $x_{i-1} \simeq x_i \simeq x_{i+1}$, et donc $v_i = 0$. On a donc nécessairement $x_{i-1} < x_{i+1}$. Pour les

mêmes raisons, au plus deux candidats, le candidat i inclus, choisissent la position x_i , et ce ne peut être, le cas échéant, que les candidats i et $i + 1$ ou i et les candidats $i - 1$.

Si $x_{i-1} \simeq x_i < x_{i+1}$ les électeurs qui votent pour i sont : avec probabilité 1, les électeurs positionnés sur le segment $]x_i, x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[$; avec probabilité $\frac{1}{2}$, l'électeur positionné en x_i et l'électeur positionné en $x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. On a donc

$$V_i = \int_{x_i}^{x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}} dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

.

Si $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, les électeurs qui votent pour i sont : avec probabilité 1, les électeurs positionnés sur le segment $]x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}, x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[$; avec probabilité $\frac{1}{2}$, l'électeur positionné en $x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}$ et l'électeur positionné en $x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. On a donc

$$V_i = \int_{x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}}^{x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}} dx = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

.

Si $x_{i-1} < x_i \simeq x_{i+1}$, les électeurs qui votent pour i sont : avec probabilité 1, les électeurs positionnés sur le segment $]x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}, x_i[$; avec probabilité $\frac{1}{2}$, l'électeur positionné en x_i et l'électeur positionné en $x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}$. On a donc

$$V_i = \int_{x_i - \frac{x_i-x_{i-1}}{2}}^{x_i} dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

.

Cas 3. On examine, enfin, le cas $i = n$.

On remarque comme ci-dessus qu'au plus deux candidats, le candidat n inclus, choisissent la position x_n . Et que dans ce cas on a nécessairement $x_n \simeq x_{n-1}$.

Supposons $x_n \simeq x_{n-1}$. Les électeurs positionnés à droite du candidat n votent nécessairement pour ce dernier. L'électeur positionné entre x_n et x_{n-1} vote avec même probabilité $\frac{1}{2}$ pour le candidat n ou le candidat $n - 1$. On a donc

$$V_n = \int_{x_n}^1 dx = 1 - x_n = 1 - \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

.

Si, enfin, $x_{n-1} < x_n$, les électeurs positionnés sur le segment $]x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, x_n]$ s'ajoutent aux précédents, et l'électeur positionné en $x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$ vote avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour le candidat n ou pour le candidat $n - 1$. On a donc

$$V_n = \int_{x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{2}}^1 dx = 1 - x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{2} = 1 - \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

.

□

A.2 Preuve Lemme 2

Démonstration. Gardons à l'esprit que, pour choisir sa position, le parti d'opposition doit tenir compte de trois cas : N peut se positionner à gauche de x_L , entre x_L et x_R , ou à droite de x_R .

Cas 1. $x_N < x_L < x_R \implies V_N = V_1, V_L = V_2, V_R = V_3$

D'après le lemme 1 le nouvel entrant ne se présentera pas si pour tout x_N

$$x_N + \frac{1}{2}(x_L - x_N) < \text{Max}\left\{\frac{1}{2}(x_R - x_N); (1 - x_R) + \frac{1}{2}(x_R - x_L)\right\}$$

Puisque nous ne savons pas si V_L est plus grand que V_R , nous devons considérer les deux possibilités :

$$V_N < V_L \iff x_N < \frac{1}{2}(x_R - x_L) \quad (2)$$

et

$$V_N < V_R \iff x_N < 2 - x_R - 2x_L \quad (3)$$

Considérons dans un premier temps le cas 2. Quand x_N augmente, la position du candidat N se rapproche de x_L jusqu'à ce que x_N tende vers x_L . Par conséquence en remplaçant x_N par x_L la condition 2 est satisfaite pour tout x_N si et seulement si

$$x_L < \frac{1}{3}x_R \quad (4)$$

Considérons maintenant le cas 3. En procédant de la même façon, on montre que la condition 3 est satisfaite pour tout x_N si et seulement si

$$x_L < \frac{2 - x_R}{3} \quad (5)$$

Dans la mesure où $x_R < 1$, l'expression 5 implique l'expression 4.

En conclusion, le nouvel entrant ne choisira jamais une position à droite de L si et seulement si :

$$x_L < \frac{2 - x_R}{3} \quad (6)$$

Cas 2. $x_L < x_N < x_R \implies V_L = V_1, V_N = V_2, V_R = V_3$

Supposons maintenant que le nouvel entrant cherche à se positionner entre les deux premiers candidats. D'après le lemme 1 les deux conditions suffisantes pour qu'il ne se présente pas sont

$$x_N > x_R - 2x_L \quad (7)$$

et

$$x_N < 2 - 2x_R + x_L \quad (8)$$

Compte tenu de la position N , les conditions 7 et 8 sont satisfaites pour tout x_N si

$$x_R - 2x_L < x_N < 2 - 2x_R + x_L \quad (9)$$

N ne peut donc jamais se positionner entre les deux premiers candidats et gagner l'élection si

$$x_L > x_R - \frac{2}{3} \quad (10)$$

Cas 3. $x_L < x_R < x_N \implies V_L = V_1, V_R = V_2, V_N = V_3$

Considérons le dernier cas dans lequel N cherche à se positionner à droite de R

Les conditions suffisantes pour que N ne se présente pas sont

$$x_N > 2 - x_L - 2x_R \quad (11)$$

ou

$$x_N > \frac{x_L + 2 - x_R}{2} \quad (12)$$

Dans ce cas, on remarque que

$$x_N > 2 - x_L - 2x_R \Rightarrow x_N > \frac{x_L + 2 - x_R}{2}$$

L'expression 12 est donc redondante.

x_N augmente lorsqu'il se rapproche de x_R . Par conséquent, le nouvel entrant ne se présente pas tant que

$$x_L > 2 - 3x_R \quad (13)$$

Les conditions 6, 10 et 13 sont ensemble nécessaires et suffisantes pour que la position choisie par le candidat L empêche un nouveau candidat de rentrer en lice. Cependant, une position empêchant un nouveau candidat de gagner ne garantit pas forcément la victoire au parti d'opposition.

Pour s'assurer la victoire, après avoir exclu les positions permettant à N de rentrer et d'avoir une probabilité non nulle de gagner, L doit se concentrer sur les positions lui permettant d'éliminer les chances de victoire de R .

$$V_L > V_R \iff x_L > 1 - x_R \quad (14)$$

□

A.3 Preuve Lemme 3

Démonstration. On étudie la configuration d'équilibre dans laquelle il y a partage égal des voix entre les n candidats, c'est-à-dire $V_i = \frac{1}{n}x_R$ pour tout $i = 1, \dots, n$, dans le cas où n est pair.

On remarque tout d'abord que l'on ne peut avoir $x_1 < x_2$ à l'équilibre. En effet, si $x_1 < x_2$, le candidat 1 augmente ses votes, toutes choses égales par ailleurs, en opérant un glissement $\Delta x < x_2 - x_1$ vers la droite le maintenant à la gauche du candidat 2 (il augmente ainsi son électorat « captif », situé sur sa gauche, de Δx , et réduit son électorat de droite de $\frac{1}{2}\Delta x$, soit une augmentation nette de $\frac{1}{2}\Delta x$). On a donc nécessairement $x_1 \simeq x_2$ à l'équilibre, c'est-à-dire que les deux candidats les plus à gauche forment une paire sur cette position.

La première relation d'équilibre du Lemme 1, combinée à l'hypothèse de partage égal des voix, implique par ailleurs $V_1 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}x_R$. On a donc

$$x_1 \simeq x_2 \simeq \frac{1}{2}x_R$$

.

La relation de récurrence du Lemme 1, $V_i = \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2}$ pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, combinée à l'hypothèse de partage égal des voix implique $x_{i+1} - x_{i-1} = \frac{2}{n}x_R$ pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$. En particulier, x_3 et x_4 sont placés à même distance $\frac{2}{n}x_R$ à droite de la position d'extrême gauche $x_1 \simeq x_2 \simeq \frac{1}{2}x_R$. En d'autres termes, les candidats 3 et 4 forment eux aussi une paire sur la position $x_3 \simeq x_4 \simeq \frac{3}{n}x_R$. La relation de récurrence permet d'étendre cette propriété de proche en proche à tous les candidats, soit $x_{2i-1} \simeq x_{2i} = \frac{2i-1}{n}x_R$ pour tout $i \in \{1, \frac{n}{2}\}$.

On a montré à ce stade que les candidats se regroupent par paires sur des positions également réparties sur l'intervalle $[0, x_R[$. Deux positions contigües sont séparées par la distance $\frac{2}{n}x_R$. La position la plus à gauche est $\frac{1}{n}x_R$.

Reste à montrer qu'il s'agit bien d'un équilibre. On rappelle que, par construction du jeu de concurrence électorale, $i < j$ implique $x_i < x_j$. Appliquée aux positions précédentes, cette condition implique que les déviations de Nash accessibles aux candidats de gauche (resp. droite) des paires $x_1 \simeq x_2, x_3 \simeq x_4 \dots, x_{n-1} \simeq x_n$ c'est-à-dire aux candidats de rang impair $i \in \{1, 3, \dots, n-1\}$ (resp. pair $i \in \{2, 4, \dots, n\}$), sont des glissements de position $\Delta x \in [0, \frac{1}{n}x_R]$ vers la gauche (resp. vers la droite).

Pour les deux candidats situés aux deux extrêmes de l'intervalle politique, c'est-à-dire les candidats 1 à gauche et n à droite, on vérifie facilement que ces déviations entraînent un transfert de voix vers leur concurrent dans la paire (c'est-à-dire du candidat 1 vers le candidat 2, et du candidat n vers le candidat $n-1$), égal à $\frac{\Delta x}{2}$. Leurs électorats respectifs se trouvent donc réduits de $\frac{\Delta x}{2}$.

Pour les candidats intermédiaires, correspondants aux indices 2 à $n-1$, on vérifie de même que la déviation d'un candidat entraîne aussi un transfert de voix $\frac{\Delta x}{2}$ de son électorat vers celui de son concurrent dans la paire, mais lui permet également de capter une quantité $\frac{\Delta x}{2}$ de voix de son concurrent dans la paire contiguë, de sorte que son total de voix reste inchangé.

□

A.4 Preuve Lemme 4

Démonstration. On montre qu'il n'y a pas d'équilibre avec partage égal des voix si n est impair, supérieur ou égal à 3.

Le raisonnement conduit ci-dessus, dans la démonstration du Lemme 3, s'applique à l'identique aux $n-1$ candidats les plus à gauche : ceux-ci se répartissent par paires sur les positions situées entre $\frac{1}{n}x_R$ pour la position la plus à gauche (paire $x_1 \simeq x_2$) et $\frac{n-2}{n}x_R$ pour la position la plus à droite (paire $x_{n-2} \simeq x_{n-1}$). La troisième relation d'équilibre du Lemme 1, appliquée à l'intervalle $[0, x_R[$, et l'hypothèse de partage égal des voix, impliquent alors : $V_n = x_R - x_n + \frac{1}{2}(x_n - \frac{n-2}{n}x_R)$. On en déduit $x_n = x_R$

, ce qui est contradictoire, l'intervalle des positions accessibles au candidat n étant $[\frac{n-2}{n}x_R, x_R[$. $\square$

A.5 Preuve Lemme 5

Démonstration. On note f la fonction de densité de probabilité de x_R sur $[\frac{1}{2}, 1]$. On a par hypothèse $f(x_R) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ pour tout $x_R \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Dans ce qui suit, n est un nombre pair fixe ≥ 2 . Et l'on pose $Q_i^Z(n) = Q_i^Z$ et $D_i(n) = D_i$ pour alléger les notations.

On note $\overline{Q_i^Z}$ l'adhérence de Q_i^Z . Comme conséquence du Lemme 2, le parti $Z \in \{L, R, N\}$ a une probabilité non nulle d'être élu si et seulement si $x_R \in \cup_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{Q_i^Z}$.

Comme conséquence de la Proposition 3, pour une position du parti de droite x_R donnée, la probabilité du choix de position $x_L = \frac{2i-1}{n}x_R$ du parti de gauche à l'issue de la primaire est égale à $\frac{2}{n}$. Le tirage aléatoire de x_R et la victoire de la i -ème paire à l'élection primaire étant des événements indépendants, la probabilité (densité) de $(x_R, x_L) \in [\frac{1}{2}, 1] \times D_i$ est donc $\frac{2}{n}f(x_R)$.

On note $p_Z(n)$ la probabilité d'élection du parti Z . Comme conséquence de ce qui précède : $p_Z(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{\overline{Q_i^Z}} \frac{2}{n}f(x_R)dx_R$.

Un calcul simple implique alors : $p_Z(n) = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{\overline{Q_i^Z}} dx_R$.

On pose $\lambda(\overline{Q_i^Z}) = \int_{\overline{Q_i^Z}} dx_R$. $\lambda(\overline{Q_i^Z})$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\overline{Q_i^Z}$. Elle s'interprète simplement, comme la somme des longueurs des intervalles dont la réunion forme $\overline{Q_i^Z}$. On remarque que $\lambda(\overline{Q_i^Z}) = \lambda(Q_i^Z)$.

Enfin, les ensembles $\overline{Q_i^Z}$, $Z \in \{L, R, N\}$, étant deux à deux disjoints quel que soit i , on a :

$$p_L(n) + p_R(n) + p_N(n) = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (\lambda(\overline{Q_i^L}) + \lambda(\overline{Q_i^R}) + \lambda(\overline{Q_i^N})) = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda(\overline{Q_i^L} \cup \overline{Q_i^R} \cup \overline{Q_i^N})$$

Par ailleurs, $\overline{Q_i^L} \cup \overline{Q_i^R} \cup \overline{Q_i^N} = [\frac{1}{2}, 1]$ par construction.

On en déduit : $p_L(n) + p_R(n) + p_N(n) = 1$. $\square$