Équilibre général de dons individuels

Jean Mercier Ythier

Nous étudions les propriétés d'un système social comprenant plusieurs agents, possédant chacun une dotation initiale en un bien de consommation unique (le revenu). Chaque agent est susceptible de consommer ou de donner tout ou partie de la fraction de revenu qu'il possède à l'origine ou du fait d'un don. Ses préférences sont définies sur l'ensemble des allocations, et strictement croissantes en sa propre consommation. Il choisit ses dons de manière à maximiser son utilité sous contrainte de ressource, en considérant les dons des autres agents comme donnés. Un équilibre général de dons individuels est un équilibre de ce jeu non coopératif de Nash. On étudie les propriétés normatives et positives de l'équilibre. On fournit en particulier une caractérisation de l'équilibre à l'aide d'un concept original, l'(i, j)-maximum. La généralisation de ces résultats au cas d'une économie comprenant plusieurs biens et un marché de concurrence pure est parfaite est également discutée.

INTRODUCTION

Un bon point de départ pour cette étude peut être trouvé dans le *Traité de sociologie générale* de V. Pareto [1916]. L'auteur, soucieux d'étendre les méthodes de l'analyse économique à l'ensemble de la réalité sociale, modifie ses concepts de deux manières. Il remplace tout d'abord l'ophélimité, ou satisfaction retirée par un individu de sa consommation de biens marchands, par la notion plus générale d'utilité, qui procède, pour chaque personne, de ses consommations privatives (ophélimité), de la jouissance de biens publics (« utilité indirecte ») et de l'ophélimité des autres personnes. Puis il substitue l'utilité à l'ophélimité dans la définition de son célèbre optimum, intitulé à présent « maximum d'utilité pour la collectivité » et ainsi distingué du « maximum d'ophélimité pour la collectivité ».

Ces innovations ont connu un intéressant prolongement à partir du milieu des années soixante, dans les études relatives aux redistributions pareto-optimales, initiées par les contributions de Serge-Christophe Kolm [1966] et de Hochman et Rodgers [1969]. Ces multiples travaux, recensés notamment dans les ouvrages de Cazenave et Morrisson [1978], de Kolm [1984] et dans l'article de L. Kranich [1988], traitent de l'extension du champ d'application du modèle walrasso-paretien d'échange et de production aux phénomènes de redistribution volontaire en observant que la distribution du bien-être (ophélimité) ou de la richesse est, sous l'hypothèse d'interdépendance « non paternaliste » des utilités, formellement analogue à un bien public.

Ces développements fournissent, dans un cadre d'équilibre général, des éléments d'explication ou de justification à l'existence de systèmes publics de redistribution de la richesse, en fondant ces derniers, conjointement, sur l'existence de désirs redistributifs privés (sentiments « bienveillants »), et sur une norme d'efficacité parétienne.

Le champ d'analyse du présent article est sensiblement différent, et en fait largement complémentaire du précédent. Nous nous intéresserons en effet ici à la redistribution volontaire privée, ou, si l'on préfère, au don individuel, entendu comme décision individuelle de transférer à autrui, sans contrepartie, une fraction de sa richesse personnelle. Nous retiendrons ainsi dans ce qui suit l'hypothèse d'interdépendance des utilités, sans préjuger d'ailleurs de la nature des sentiments, « bons » ou « mauvais », qu'éprouvent les agents, et admettrons que chacun peut, en toute indépendance, transférer à autrui tout ou partie de sa richesse personnelle par un don individuel. Nous supposerons de surcroît, pour simplifier l'analyse, que les donateurs individuels considèrent comme négligeable l'influence de leurs dons sur les comportements redistributifs des autres agents (en termes techniques, nous étudions un jeu non coopératif de Nash).

L'analyse du fonctionnement de ce système social fait ressortir deux traits saillants.

D'un point de vue normatif, en premier lieu, une allocation d'équilibre est telle que l'on ne peut accroître le bien-être social d'un agent (son « utilité ») sans diminuer le bien-être privé d'un autre (son « ophélimité »). Réciproquement, toute allocation de ce type est une allocation d'équilibre pour certaines distributions initiales de la richesse bien choisies.

L'existence d'un équilibre n'est pas toujours garantie, en second lieu, et l'on fournit des exemples de systèmes sociaux ne possédant pas d'équilibre pour certaines ou même toutes les distributions initiales de la richesse. Cette existence de l'équilibre est assimilable à la présence d'une « guerre de dons » entre certains agents. On montre, en particulier, qu'une condition suffisante pour qu'un équilibre existe quelle que soit la distribution initiale de la richesse est qu'aucun agent ne souhaite redistribuer en faveur de plus riche que lui.

Nous allons successivement définir (section II) notre système social dans un cadre simple, où n'existe qu'un unique bien de consommation, puis introduire (section III) les concepts originaux indispensables à l'analyse de ses propriétés, fournir (section IV) une caractérisation des équilibres, et étudier (section V) l'existence de ces derniers. La section VI discute brièvement la généralisation de nos résultats au cas d'un système social comprenant plusieurs biens de consommation. Nous esquissons enfin, dans la conclusion, une comparaison de l'analyse de la redistribution volontaire privée présentée ici avec celle des redistributions Pareto-optimales mentionnée plus haut.

DESCRIPTION FORMELLE DU SYSTÈME SOCIAL

Nous proposons dans cette section une définition simplifiée de notre système social. Celui-ci comprend un nombre quelconque n d'agents, désignés chacun par un indice i parcourant l'ensemble $N = \{1, ..., n\}$, et un bien de consommation unique, non reproductible et parfaitement divisible, dont la quantité globale disponible est d'une unité.

On rappelle que l'extension des résultats des sections IV et V au cas général d'un système social à biens de consommation multiples est brièvement discutée en section VI.

Système social

Les données fondamentales sont les contraintes *a priori* sur les décisions individuelles en matière de consommation et de don, les préférences qui guident ces décisions, et la distribution initiale des droits de propriété.

Une consommation de l'agent i est un nombre réel x_i. L'ensemble de consommation de l'agent i, X_i, qui représente les contraintes *a priori* sur la consommation de i, est un sous-ensemble de la droite réelle $\mathbb{R}$. On suppose que X_i est égal à la demi-droite réelle positive $\mathbb{R}_+$. Une allocation est un élément x de $\mathbb{R}^n$. On note X^i le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la $i^{\text{ème}}$ projection est X_i et la $j^{\text{ème}}$ projection est $\mathbb{R}$ pour tout $j \neq i$. L'ensemble d'allocation est le produit cartésien $X = \prod_{i \in N} X_i$. Une allocation x appartenant à X est réalisable si $\sum_{i \in N} x_i \leq 1$. On note S_n l'ensemble $\{x \in X | \sum_{i \in N} x_i \leq 1\}$ des allocations réalisables.

L'ensemble de transfert de i à j, T_{ij}, décrit les contraintes *a priori* qui pèsent sur les dons de i à j. C'est un sous-ensemble de l'espace des biens $\mathbb{R}$. On pose, par convention, $T_{ii} = \{0\}$, et l'on suppose $T_{ij} = \mathbb{R}_+$ pour tout j distinct de i. Un vecteur-dons de i est un élément t_i du produit cartésien $T_i = \prod_{j \in N} T_{ij}$. Un vecteur-dons est un élément t du produit cartésien $T = \prod_{i \in N} T_i$.

Les préférences de l'agent i sont décrites par une fonction d'utilité w_i, définie sur l'ensemble X^i. On appelle w_i la fonction d'utilité sociale de l'agent i. On suppose que w_i est strictement croissante en x_i, mais on ne fait aucune hypothèse sur le sens de variation de w_i en x_j pour j distinct de i, c'est-à-dire que nos agents pourront être aussi bien indifférents que malveillants ou bienveillants les uns envers les autres. La malveillance (resp. bienveillance) est entendue ici en un sens technique de décroissance (resp. croissance) stricte de w_i en x_j avec $j \neq i$. L'interprétation psychologique de cette propriété formelle des fonctions d'utilité sociales individuelles nous semble toutefois suffisamment naturelle pour que nous renoncions ici à l'en distinguer.

Chaque agent i est, enfin, nanti d'une dotation initiale $\omega_i \geq 0$. On a naturellement : $\sum_{i \in N} \omega_i = 1$.

Un système social est alors un objet du type : $(w_i, X_i, T_i, \omega_i)_{i \in N}$.

Équilibre

Le fonctionnement de notre système social est calqué sur le modèle d'un jeu non coopératif de Nash.

On utilisera les notations suivantes. Soit t un élément de T et $\bar{t}_i$ un élément de T_i : $t_{n/i}$ est le vecteur $(t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n)$, c'est-à-dire le vecteur t privé de sa i-ème composante ; $(t_{n/i}, \bar{t}_i)$ est le vecteur $(t_1, ..., t_{i-1}, \bar{t}_i, t_{i+1}, ..., t_n)$ obtenu en remplaçant la i-ème composante de t par $\bar{t}_i$; $\Delta_i t$ est le nombre $\sum_{j \in N} (t_{ji} - t_{ij})$, c'est-à-dire le transfert net dont i bénéficie en t (on peut naturellement avoir $\Delta_i t < 0$; remarquons de plus que $\sum_{i \in N} \Delta_i t = 0$ pour tout t).

Les actions individuelles sont définies simultanément de la manière suivante. Un vecteur-action $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est tel que pour tout i, l'action a_i de l'agent i est un vecteur $a_i = (z_i, t_i)$ où : t_i est un don de i ; z_i est une consommation nette, c'est-à-dire un nombre de la forme $x_i - (\omega_i + \Delta_i t)$ où x_i représente une consommation (qui n'est pas nécessairement dans X_i) et t est le vecteur-dons formé à partir des composantes-dons des actions $a_1, ..., a_n$.

Chaque agent considère les actions des autres comme données. L'agent i, confronté à l'environnement $\bar{a}_{n/i} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1} \ldots, \bar{a}_n)$, où $\bar{a}_j = (\bar{z}_j, \bar{t}_j)$, considère donc par construction que le choix d'une action $a_i = (z_i, t_i)$ détermine l'allocation x telle que : $x_i = z_i + \omega_i + \Delta_i(\bar{t}_{n/i}, t_i)$; $x_j = \bar{z}_j + \omega_j + \Delta_j(\bar{t}_{n/i}, t_i)$ pour tout j distinct de i. En d'autre termes, la représentation qu'il se fait des conséquences de ses actes repose sur l'hypothèse ou la croyance que les bénéficiaires de ses dons les consomment. Notons qu'il n'est pas logiquement indispensable que les agents croient effectivement cela, mais seulement qu'ils considèrent cette hypothèse comme un guide efficace de l'action.

Les ressources que chaque agent peut ainsi utiliser, soit en les consommant, soit en les donnant, proviennent de sa dotation initiale ou des dons qu'il reçoit. La contrainte de budget de i, confronté à l'environnement $\bar{a}_{n/i}$, s'écrit : $z_i = x_i - (\omega_i + \Delta_i(\bar{t}_{n/i}, t_i)) \leq 0$.

Le comportement de i, confronté à l'environnement $\bar{a}_{n/i}$ consiste alors à choisir une action $a_i = (z_i, t_i)$ qui maximise sa fonction d'utilité w_i dans l'ensemble de budget : $\{x \in X^i | \exists t_i \in T_i\ ,\ z_i = x_i - (\omega_i + \Delta_i(\bar{t}_{n/i}, t_i)) \leq 0$ et $x_j = \bar{z}_j + \omega_j + \Delta_j(\bar{t}_{n/i}, t_i)$ pour tout $j \neq i\ \}$.

Un équilibre de notre système social, que nous appellerons équilibre social est, enfin, un vecteur d'actions $a^* = (a_1^*, ..., a_n^*)$ tel que pour tout i, a_i^* maximise w_i dans l'ensemble de budget de i correspondant à l'environnement $a_{n/i}^*$.

Cette spécification du modèle, parfaitement générale, est toutefois inutilement lourde sous les hypothèses, formulées plus haut, de divisibilité du bien de consommation et croissance stricte de w_i en x_i. Celles-ci impliquent, en effet, que les agents saturent leurs contraintes de budget à l'optimum. Or, si tel est le cas, tout vecteur-dons t de T détermine une allocation et une seule : $(\omega_i + \Delta_i t)_{i \in N}$, que l'on notera $x(t)$. Il en résulte que le fonctionnement décrit ci-dessus est équivalent à celui d'un système social où : les actions de i sont ses dons t_i ; le comportement de i confronté à l'environnement $\bar{t}_{n/i}$, consiste en la maximisation de $w_i(x((\bar{t}_{n/i}, t_i)))$ dans $\{t_i \in T_i | \omega_i + \Delta_i(t_{n/i}^*, t_i) \in X_i\}$; un équilibre social est un vecteur-dons t^* tel que, pour tout i, t_i^* maximise $w_i(x((t_{n/i}^*, t_i)))$ dans $\{t_i \in T_i | \omega_i + \Delta_i(t_{n/i}^*, t_i) \in X_i\}$.

C'est cette formulation allégée que nous retiendrons dans ce qui suit.

GRAPHE DES DÉSIRS REDISTRIBUTIFS ET OPTIMUM SOCIAL

Nous avons dû forger quatre concepts originaux pour analyser les propriétés de notre système social.

Ces concepts peuvent être groupés en deux couples : l'(i, j) - maximum et le graphe des désirs redistributifs, qui permettent de caractériser la structure du graphe des dons d'équilibre ; la relation de préférence sociale (RPS) et l'optimum social, qui décrivent les propriétés normatives de notre système social.

Signalons, avant de commencer, une conséquence importante de l'existence d'un seul bien. Il résulte en effet de cette caractéristique de notre système social que le nombre x_i peut être interprété indifféremment comme : un indice ordinal de satisfaction traduisant le bien-être « privé » (ophélimité) de l'agent i ; une mesure physique de sa consommation ; et enfin la valeur monétaire de cette dernière (revenu consommé). Or il est clair que, dans le cas général d'un système social comprenant plusieurs biens, les trois notions précédentes (ophélimité, consommation, richesse consommée) sont distinctes. De plus, la généralisation, brièvement évoquée en partie VI, des définitions et propriétés que nous présentons en III, IV et V, repose exclusivement sur la première de ces notions (le bien-être privé ou ophélimité). Nous interpréterons donc le plus souvent dans ce qui suit le nombre x_i de cette manière, c'est-à-dire comme un indice ordinal de bien-être privé.

A (i, j)-maximum et graphe des désirs redistributifs.

L'(i, j) - maximum est le concept clé. Le graphe des désirs redistributifs en est directement extrait. Ces deux notions combinées vont nous permettre d'analyser la contribution des dons au fonctionnement de notre système social.

(i, j) - maximum

Pour introduire la définition de l'(i, j) - maximum, plaçons-nous dans la situation abstraite suivante. L'agent i, placé devant l'allocation réalisable x^* $(x^* \in S_n)$, peut réallouer à sa guise, dans les limites imposées par : la contrainte de réalisabilité $(x \in S_n)$; les contraintes $x_k \geq x_k^*$ pour tout $k \neq j$, stipulant que le bien-être privé de tous les agents autres que j ne doit pas décroître. Nous dirons alors que x^* est un (i, j) - maximum si i ne peut accroître le bien-être social w_i (x*) dont il jouit en x^* sans violer les contraintes ci-dessus.

Formellement, une allocation x^* est un (i, j) - maximum si elle est réalisable et s'il n'existe aucune allocation x dans $\{x \in S_n | x_k \geq x_k^* \forall k \neq j\}$ telle que $w_i(x) > w_i(x^*)$. On note M_{ij} l'ensemble des (i, j) - maxima.

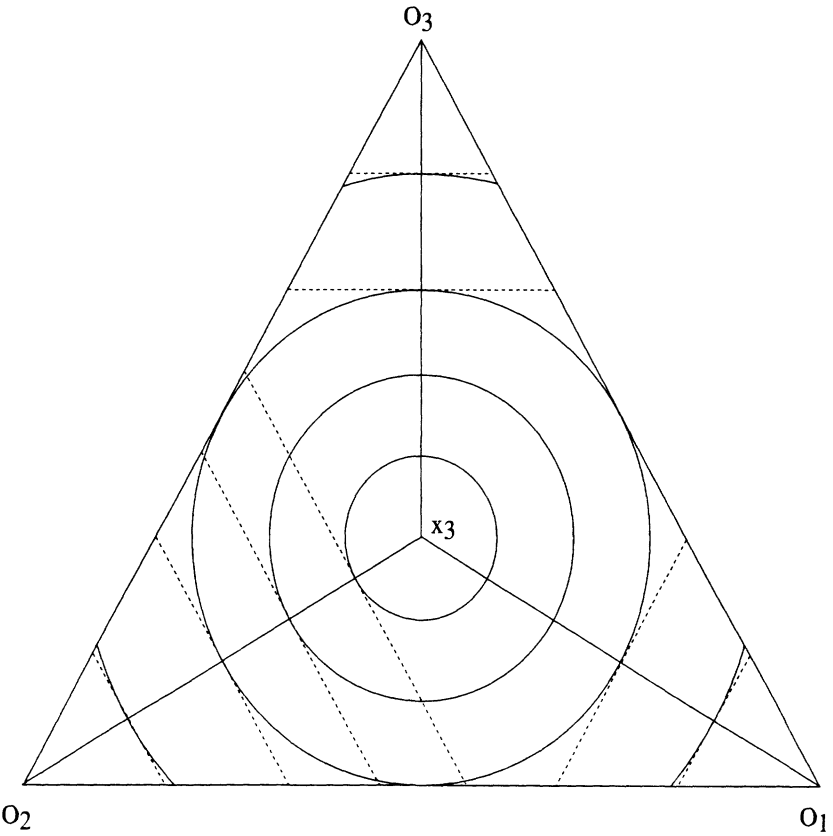
On peut interpréter très simplement cette définition abstraite, en se souvenant que, par hypothèse, w_i est strictement croissante en x_i quel que soit i. Combiné à la divisibilité du bien, cela implique que $\sum_{k \in N} x_k^* = 1$ pour tout (i, j) - maximum x^*. Il en résulte immédiatement qu'un (i, j) - maximum est nécessairement une allocation réalisable en laquelle l'agent i ne souhaite (du point de vue de sa fonction d'utilité sociale w_i) ou ne peut (du fait de la contrainte *a priori* $x_j \geq 0$) redistribuer le bien-être privé au détriment de j. On montre de plus dans la proposition 1 ci-après que cette condition nécessaire est également suffisante, et caractérise donc les allocations (i, j) - maximales, sous l'hypothèse que les fonctions d'utilité sociale sont quasi concaves et différentiables ($w'_{ik}(x)$ y représente la dérivée partielle de w_i par rapport à x_k en x).

Rappelons toutefois que la redistribution dont il est ici question est abstraite en ce sens qu'il n'est fait aucune référence à la contrainte de budget. L'(i, j) - maximum est un instrument d'analyse du fonctionnement du système social et non la description d'un comportement individuel.

Proposition 1. On suppose que w_i est différentiable et quasi concave quel que soit $i \in N$. Alors, pour qu'une allocation $x^* \in X$ soit (i, j) - maximale, il faut et il suffit que : $\sum_{k \in N} x_k^* = 1$; et, ou bien $x_j^* = 0$, ou bien $w'_{ij}(x^*) \geq w'_{ik}(x^*)$ pour tout $k \in N$.

La notion d'(i, j) - maximum est illustrée graphiquement dans la figure 1. On y considère un système social comprenant trois agents. Le triangle représente l'ensemble $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^3_+ | \sum_{l=1}^{3} x_l = 1\} \subset S_3$. On y a dessiné la carte d'indifférence de l'agent 3, sous la forme de cercles concentriques, dont le centre x^3 est le maximum de w_3 dans S_3. Le lecteur pourra vérifier par lui-même que : l'ensemble M_{31} des (3, 1) - maxima, est la surface triangulaire $0_2\, x^3\, 0_3$; M_{32} est la surface triangulaire $0_1\, x^3\, 0_3$; M_{33} est la surface triangulaire $0_1\, x^3\, 0_2$. On remarque de plus que : $\bigcap_{j \in N} M_{3j} = \{x^3\}$; $\bigcup_{j \in N} M_{3j} = K_3$; M_{3j} est fermé dans K_3 pour tout j.

Graphique 1.



Ces dernières propriétés sont très générales et fort utiles. On les a rassemblées dans la proposition suivante, démontrée en annexe.

Proposition 2. Supposons que w_i est continu quel que soit i. Alors, M_{ij} est un sous-ensemble fermé de $K_n = \{x \in X | \sum_{i \in N} x_i = 1\}$ pour tout $(i, j) \in N \times N$. Si de plus w_i est différentiable et quasi concave quel que soit i, alors, pour tout $i \in N$: $\bigcup_{j \in N} M_{ij} = K_n$; $\bigcap_{j \in N} M_{ij}$ est l'ensemble des maxima de w_i dans S_n.

Graphe des désirs redistributifs

On appelle graphe des désirs redistributifs en une allocation x, et on note $\gamma(x)$, l'ensemble des couples d'agents distincts (i, j) tels que x est (i, j) - maximale. formellement : $\gamma(x) = \{(i,j) \in N \times N | i \neq j, x \in M_{ij}\}$.

Une structure particulière des graphes des désirs redistributifs, les circuits, va jouer un rôle important dans la discussion des problèmes d'existence. Nous posons donc les trois définitions suivantes.

Un circuit de $N \times N$ et une suite $((i_k, j_k))_{1 \le k \le m}$ de couples d'agents, deux à deux distincts, telle que : $i_k \neq j_k$ quel que soit k ; $j_k = i_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, ..., m-1\}$; $j_m = i_1$ (par exemple : ((1,2), (2,1)) ; ((1,2), (2,3), (3,1)) etc).

Un circuit du graphe des désirs redistributifs en x est un circuit $((i_k, j_k))_{1 \le k \le m}$ de $N \times N$ dont les éléments appartiennent à $\gamma(x)$. En d'autres termes, $x \in M_{i_k j_k}$ pour tout k appartenant à $\{1, ..., m\}$.

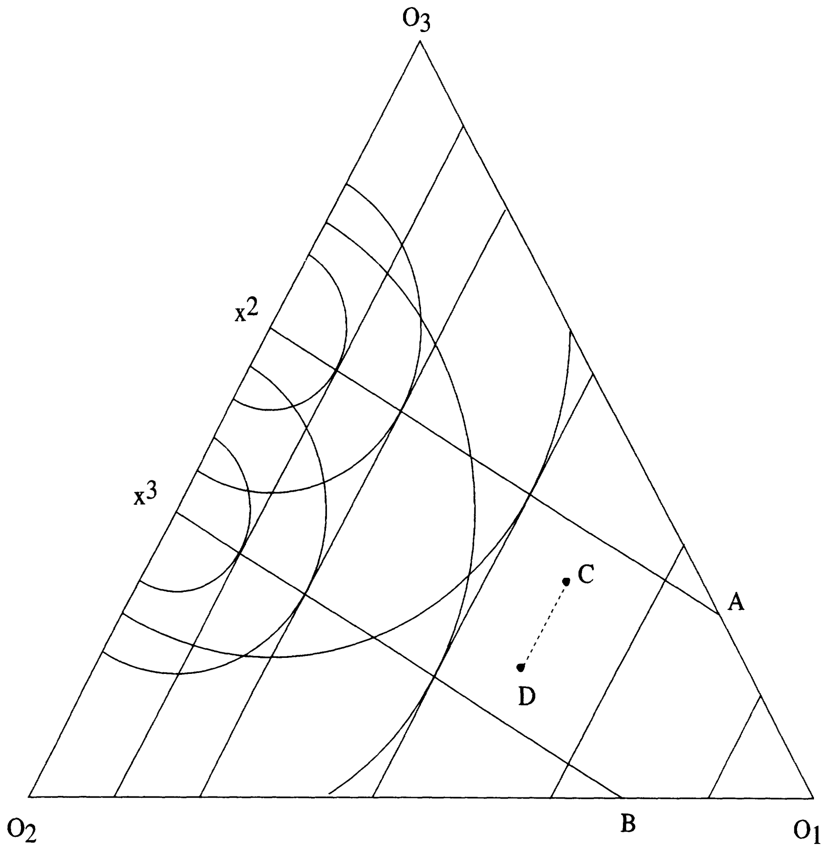
Un circuit $((i_k, j_k))_{1 \le k \le m}$ de $\gamma(x)$ est dit strict si, de plus, x n'est (i_k, i_k)-maximale pour aucun $k \in \{1, ..., m\}$. En d'autres termes, $x \in M_{i_k j_k}$ et $x \notin M_{i_k i_k}$ pour tout $k \in \{1, ..., m\}$.

C'est la notion de circuit strict que nous utiliserons dans ce qui suit. La caractérisation de l'(i, j)-maximum fournie plus haut va nous permettre d'en donner une interprétation simple. Considérons, en effet, une allocation x et supposons sans perte de généralité que $\gamma(x)$ contient un circuit strict ((1,2), (2,3), (3,1)), c'est-à-dire que $x \in M_{12} \cap M_{23} \cap M_{31}$ et x n'appartient ni à M_{11}, ni à M_{22}, ni à M_{33}. Notre caractérisation de l'(i, j)-maximum entraîne alors qu'en x, l'agent 1 souhaite diminuer sa consommation pour accroître celle de l'agent 2, qui souhaite faire de même au profit de l'agent 3, qui souhaite faire de même au profit de l'agent 1.

La figure 2 fournit un exemple graphique de circuit strict. On y considère, comme dans la figure 1, un système social de trois agents. L'agent 1 est indifférent envers 2 et 3 : sa fonction d'utilité sociale w_1 est la première projection $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1$; la carte d'indifférence associée est faite de segments parallèles à $0_2\, 0_3$, et le maximum x^1 de w_1 dans K_3 est $0_1 = (1, 0, 0)$. Les agents 2 et

3 sont indifférents à l'égard de 1 et très bienveillants l'un pour l'autre. La carte d'indifférence de 2 (resp. 3) est formée de cercles concentriques dont le centre x^2 (resp. x^3) est le maximum de w_2 (resp. w_3) dans K_3. Le lecteur pourra vérifier par lui-même que $\gamma(x)$ contient le circuit strict ((2,3), (3,2)) en tout point x de l'intérieur relatif de la surface x^2 A x^1 B x^3.

Graphique 2.



Relation de préférence sociale et optimum social

Nous arrivons à présent au couple des concepts normatifs. Comme plus haut, le second, l'optimum social, est dérivé du premier, la relation de préférence sociale (RPS). Nous allons donc les présenter dans l'ordre logique, en dégageant au passage les relations très fortes qui unissent le couple normatif RPS-optimum social, au couple positif (i, j)-maximum-graphe des désirs redistributifs.

Relation de préférence sociale

La RPS est une relation binaire, notée R, et définie sur X de la manière suivante : x R x' s'il existe $i \in$ N tel que $w_i(x) > w_i(x')$ et $x_k \geq x'_k$ pour tout k distinct de i. En d'autres termes, une réallocation est une amélioration, du point de vue de la RPS, si elle accroît le bien-être social d'un agent i sans diminuer le bien-être privé des autres agents.

La RPS n'est ni réflexive, ni transitive, ni même acyclique. (On rappelle qu'une relation binaire R définie sur un ensemble X est acyclique si elle ne possède pas de cycle, un cycle de R étant une suite $(x^k)_{k=1,\dots,m}$ d'éléments de X telle que : x^{k+1} R x^k pour tout k appartenant à $\{1, \dots, m-1\}$; x^m R x^1).

La proposition 3 ci-après (démonstration en annexe) met en évidence une relation entre circuits stricts et cycles. On y établit en effet que, sous les hypothèses de différentiabilité continue et quasi-concavité des fonctions d'utilité sociales individuelles, l'existence d'un circuit strict dans un graphe des désirs redistributifs implique celle d'un cycle de la RPS.

Proposition 3. Si w_i est continûment différentiable et quasi concave pour tout i, et s'il existe une allocation x telle que $\gamma(x)$ contient un circuit strict, alors R possède un cycle.

L'intuition sous-jacente à ce résultat découle très directement de l'interprétation d'un circuit strict donnée plus haut. On rappelle, en effet, que le fait que $\gamma(x)$ contienne un circuit strict signifie que, en x, chaque agent du circuit souhaite diminuer sa consommation au profit de l'agent qui le suit dans le circuit. On peut ainsi, en prélevant une quantité de bien suffisamment petite sur l'un quelconque des agents du circuit, et en faisant circuler cette quantité de main en main le long du circuit, construire, à partir de x, une suite d'allocations formant un cycle pour la RPS.

C'est ce que nous avons fait, par exemple, dans la figure 2 , avec les points C et D. On rappelle que γ(C) et γ(D) contiennent tous deux le circuit strict ((2,3), (3,2)). On passe de C à D (resp. D à C) par un transfert de 2 vers 3 (resp. 3 vers 2) qui laisse inchangée la consommation de 1, et accroît le bien-être social de 2 (resp. 3), ce qui implique C R D R C.

Signalons pour terminer que la réciproque de la proposition 3 n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'en général l'existence d'un cycle de la RPS n'implique pas celle d'un circuit strict dans un graphe des désirs redistributifs.

Optimum social

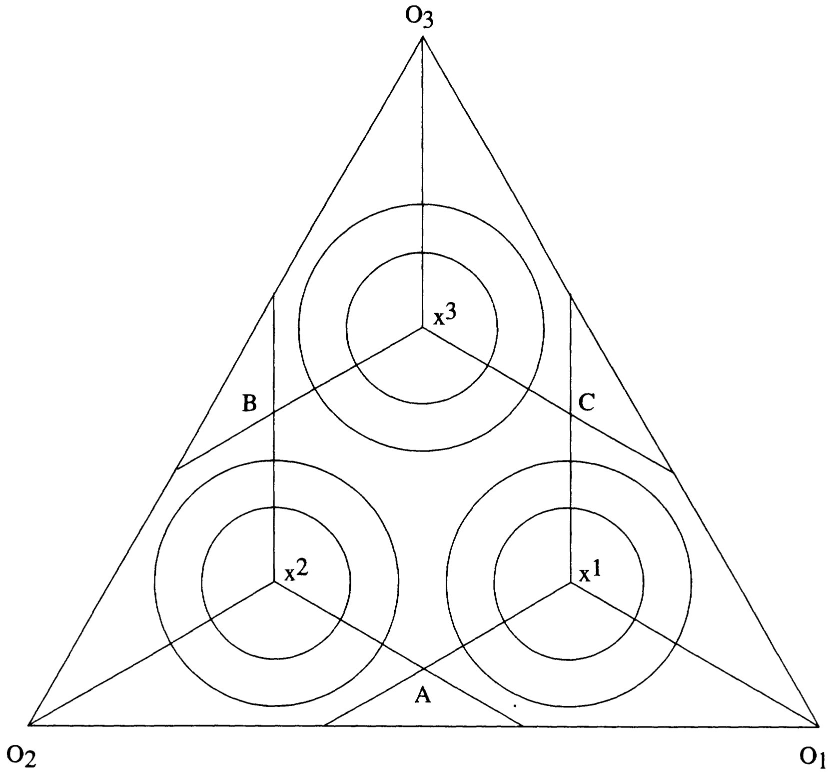
Un optimum social est, par définition, un élément maximal de la RPS dans l'ensemble des allocations réalisables, c'est-à-dire un élément x^* de S_n tel que l'on n'ait x R x^* pour aucun autre élément x de S_n. C'est, en d'autres termes, une allocation réalisable telle qu'il n'est pas possible d'accroître le bien-être social d'un agent quelconque i, sans diminuer le bien-être privé d'un agent distinct de i.

On note M l'ensemble des optima sociaux.

Il résulte des définitions de l'optimum social et de l'(i, j)-maximum qu'une allocation est un optimum social si, et seulement si, elle est (i, i)-maximale pour tout i. On a donc $M = \bigcap_{i \in N} M_{ii}$ ce qui va nous permettre d'illustrer graphiquement la notion d'optimum social dans le cas d'un système social de trois agents.

C'est l'objet de la figure 3. La carte d'indifférence de l'agent i est formée de cercles concentriques, dont le centre x^i est le maximum de w_i dans K_3. L'ensemble $M = \bigcap_{i=1}^{3} M_{ii}$ des optima sociaux de ce système social est la surface hexagonale $x^1\, A\, x^2\, B\, x^3\, C\, x^1$.

Graphique 3.



Optima de Pareto

L'optimum social ainsi défini est le concept pertinent pour l'analyse des propriétés normatives de notre système social, comme on le verra en IV.

Il est néanmoins intéressant, pour clore cette liste de définitions, de traduire dans le cadre conceptuel de ce modèle les notions parétiennes de « maximum d'ophélimité pour une collectivité » et « maximum d'utilité pour une collectivité », brièvement évoquées en introduction.

On rappelle que, dans le cadre simple que nous examinons ici, d'un système social où n'existe qu'un seul bien de consommation, l'ophélimité parétienne, que nous appelons également bien-être privé, se confond avec la consommation individuelle. Quant à l'utilité parétienne, elle correspond à notre notion de bien-être social individuel.

Dès lors, un « maximum d'ophélimité pour la collectivité », que nous appellerons plus brièvement optimum privé de Pareto (OPP) est un élément de $K_n = \{x \in X | \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1\}$, c'est-à-dire une allocation qui épuise la dotation initiale agrégée de la collectivité. C'est, en d'autres termes, une allocation réalisable telle qu'il n'est pas possible d'accroître le bien-être privé d'un agent sans diminuer celui d'un autre.

De même, un « maximum d'utilité pour la collectivité », que nous appellerons optimum social de Pareto (OSP), est une allocation réalisable telle qu'il n'est pas possible d'accroître le bien-être social d'un agent sans diminuer celui d'un autre, c'est-à-dire, formellement, une allocation x^* de S_n telle qu'il n'existe aucune autre allocation x dans S_n pour laquelle : $w_k(x) \geq w_k(x^*)$ pour tout $k \in N$ et $w_i(x) > w_i(x^*)$ pour au moins un $i \in N$.

On obtient ainsi trois notions distinctes d'optimalité, l'optimum social, l'OPP et l'OSP, que l'on va, pour terminer, brièvement comparer deux à deux.

On remarque tout d'abord qu'un optimum social est nécessairement un OPP, du fait de la croissance stricte de w_i en x_i pour tout i et de la divisibilité du bien de consommation $(M = \bigcap_{i \in N} M_{ii}$ et proposition 2). Formellement, on a, pour les systèmes sociaux décrits en II : $M \subset K_n$.

Un OSP, par contre, n'est pas nécessairement dans K_n. La malveillance est la source de cette incompatibilité potentielle entre les deux critères parétiens d'optimalité. Si, en particulier, les agents décrits plus haut sont de plus non malveillants, alors tout OSP est un OPP (une condition suffisante moins restrictive, la non-saturation locale du préordre de Pareto, est proposée dans l'article de T. Rader [1980]).

Il n'existe, enfin, aucune relation simple entre OSP et optimum social, hormis dans le cas très particulier d'un système social comprenant deux agents seulement (J. Mercier Ythier [1989], p. 111-112, et 1991). On constate ainsi, par exemple, que l'ensemble des optima sociaux de la figure 2 est réduit au point $x^1 = 0_1$, et donc, en particulier, contenu au sens strict dans l'ensemble des optima sociaux de Pareto qui forme la surface triangulaire $x^1x^2x^3$. Symétriquement, l'ensemble des optima sociaux de la figure 3, c'est-à-dire la surface hexagonale $x^1Ax^2Bx^3C$, contient, au sens strict, l'ensemble des optima sociaux de Pareto (la surface triangulaire $x^1x^2x^3$).

ÉQUILIBRE SOCIAL ET OPTIMUM SOCIAL

Nous allons, à présent, caractériser l'équilibre social à l'aide des concepts précédents.

On rappelle qu'un équilibre social est un vecteur-dons t^* tel que pour tout i, t_i^* maximise $w_i(x((t^*_{n/i}, t_i)))$ dans : $\{t_i \in T_i | \omega_i + \Delta_i(t^*_{n/i}, t_i) \in X_i\}$.

On appelle de plus graphe des dons en $t \in T$, et on note $g(t)$, l'ensemble $\{(i,j) \in N \times N | t_{ij} > 0\}$.

Le théorème 1 présenté ci-après et démontré en annexe caractérise l'équilibre social à l'aide de l'optimum social (condition d'optimalité) et du graphe des désirs redistributifs (condition de complémentarité).

Théorème 1. Si t^* est un équilibre social, alors : $x(t^*) \in M$ (optimalité) et $g(t^*) \subset \gamma(x(t^*))$ (complémentarité). Réciproquement, si, pour tout i, w_i est quasi-concave et différentiable, et si $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ dès lors que $x_i = 0$, alors tout vecteur-dons $t^* \in T$ tel que, $x(t^*) \in M$ et $g(t^*) \subset \gamma(x(t^*))$ est un équilibre social.

Nous allons successivement décrire l'intuition sous-jacente à ce résultat, puis illustrer graphiquement ce dernier.

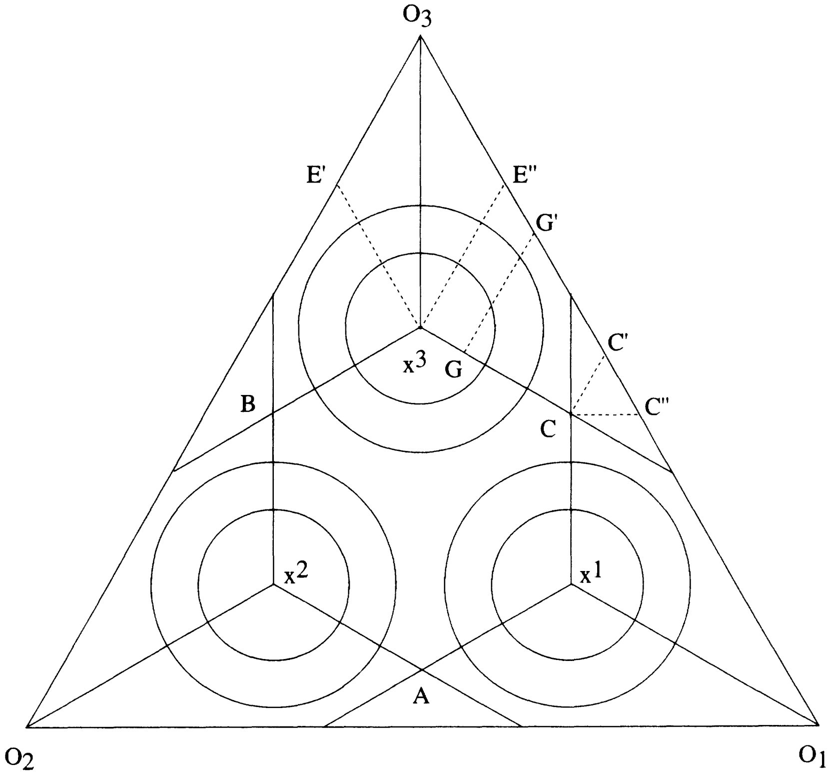
La démonstration du théorème 1 repose pour l'essentiel sur les trois faits suivants : les contraintes de budget sont vérifiées en $x(t^*)$ puisque $x(t^*) = (\omega_i + \Delta_i t^*)_{i \in N}$; sous les hypothèses de croissance stricte de w_i en x_i et de divisibilité du bien de consommation, une allocation est (i, j)-maximale seulement si elle appartient à K_n et est telle que l'agent i, placé en x^*, ne souhaite (du point de vue de w_i) ou ne peut (contrainte $x_j \geq 0$) redistribuer au détriment de j dans K_n ; sous les hypothèses additionnelles de quasi-concavité et différentiabilité des fonctions d'utilité sociales, cette condition caractérise l'(i, j)-maximalité (proposition 1).

Le théorème apparaît ainsi comme une conséquence immédiate de la définition d'un équilibre de Nash et de la caractérisation d'un (i, j)-maximum.

Le système social décrit dans la figure 4 est le même que celui de la figure 3 : la carte d'indifférence de l'agent i est faite de cercles concentriques, dont le centre est le maximum x^i de w^i dans S_n. On va y illustrer le théorème 1, en y construisant la correspondance qui, à chaque élément x de K_3, associe l'ensemble $\Omega(x)$ des vecteurs-dotations $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3_+$ qui soutiennent x comme allocation d'équilibre. Il résulte du théorème 1 que : $\Omega(x) = \phi$ si $x \notin M$; $\Omega(x) = \{\omega \in \mathbb{R}^3_+ | \exists t \in T \text{ tel que } g(t) \subset \gamma(x) \text{ et } x = (\omega_i + \Delta_i t)_{i \in N}\}$ si $x \in M$. Pour chaque $x \in M$, il suffit donc de connaître $\gamma(x)$ pour déterminer $\Omega(x)$. L'ensemble $\gamma(x)$ possède treize valeurs distinctes dans M. Nous allons nous intéresser à quatre d'entre elles, et construire $\Omega(x)$ pour chacune de celles-ci, laissant au lecteur le soin de poursuivre cet exercice. On a : $\gamma(x) = \phi$ en tout point de l'intérieur relatif de M dans K_n (c'est-à-dire en tout point de l'intérieur de la surface polygonale $x^1 A x^2 B x^3 C x^1$) ; $\gamma(x^3) = \{(3,1), (3,2)\}$;

$\gamma(x) = \{(3,2)\}$ en tout point du segment ouvert $]x^3C[$; $\gamma(C) = \{(3,2), (1,2)\}$. D'après le théorème 1, si x est une allocation d'équilibre, si t est l'équilibre, et si $t_{ij} > 0$, alors, $(i, j) \in \gamma(x)$. En d'autres termes, $\gamma(x)$ donne la structure des dons potentiels lorsque x est l'allocation d'équilibre. Il en résulte immédiatement que : $\Omega(x) = \{x\}$ en tout point de l'intérieur relatif de M ; $\Omega(x^3)$ est la surface x^3 E'O_3E"x^3 ; $\Omega(x)$ est le segment parallèle à 0_20_3, reliant x à 0_10_3, quand x appartient au segment ouvert $]x^3$, C[(par exemple : Ω(G) = [G, G']) ; Ω(C) est la surface triangulaire C C' C".

Graphique 4.



Remarquons, pour terminer, qu'il suffit d'inverser la correspondance Ω pour obtenir la correspondance d'équilibre qui, à chaque vecteur-dotations ω, associe l'ensemble des allocations d'équilibre associées. La correspondance d'équilibre de la figure 4 possède deux propriétés remarquables : ses valeurs sont non vides (existence) et réduites à un seul point (unicité). Ni l'une ni l'autre de ces propriétés ne sont générales. Il est aisé, en effet, de construire des contre-exemples à l'unicité (équilibres multiples, continuum) comme à l'existence.

La question de l'unicité ne nous retiendra pas ici. Les problèmes d'existence font l'objet de la section suivante.

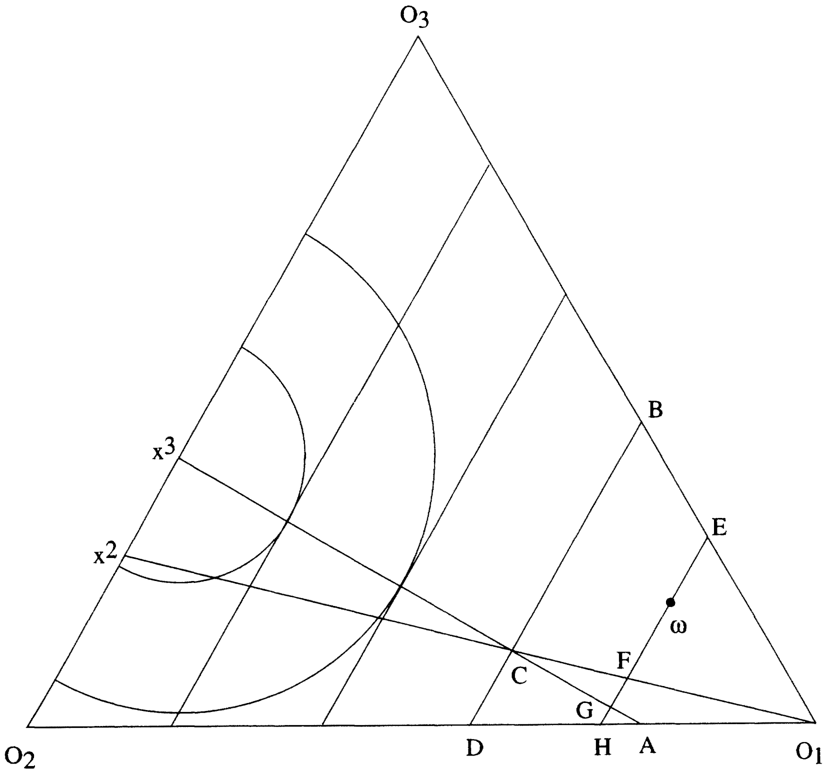
EXISTENCE D'UN ÉQUILIBRE SOCIAL

Les problèmes particuliers que pose l'existence d'un équilibre social sont illustrés dans la figure 5. L'agent 1 est indifférent envers 2 et 3 : sa fonction d'utilité sociale w_1 est la première projection $(x_1, x_2, x_3) \to x_1$; la carte d'indifférence associée est faite de segments parallèles à $0_2 0_3$, et le maximum x^1 de w_1 dans K_3 est $0_1 = (1, 0, 0)$. L'agent 3 et indifférent à 1 et très bienveillant pour 2 ; sa carte d'indifférence dans K_3 est faite de cercles concentriques dont le centre x^3 est le maximum de w_3 dans K_3. L'agent 2 est indifférent à 1 et bienveillant pour 3 : sa fonction d'utilité, de type Cobb-Douglas, est w_2 : $(x_1, x_2, x_3) \to x_2^{\frac{3}{4}} x_3^{\frac{1}{4}}$; le maximum de w_2 dans K_3 est $x^2 = (0, 3/4, 1/4)$. Le lecteur pourra s'assurer à titre d'exercice que : $M_{11} = K_3, M_{12} = [0_1, 0_3]$, $M_{13} = [0_1, 0_2]$; M_{22} est la surface triangulaire $0_1\, x^2\, 0_3$, M_{23} est la surface triangulaire $0_1\, x^2\, 0_2$, $M_{21} = [0_2, 0_3]$; M_{33} est la réunion de la surface triangulaire $Ax^3 0_2$ avec le segment $[A, 0_1]$, M_{32} est la surface $x^3\, A\, 0_1\, 0_3\, x^3$, et $M_{31} = [0_2, 0_3]$. Il en résulte notamment que : M est la surface triangulaire $x^2 C\, x^3$; $\gamma(x)$ contient le circuit strict ((2,3), (3,2)) en tout point de l'intérieur relatif de la surface triangulaire $A\, 0_1\, C$.

On constate que, pour ce système social, aucun équilibre n'existe pour les vecteurs-dotations situés dans la surface triangulaire BO_1D privée du segment BD. Considérons, par exemple, le vecteur ω. Comme 1 est indifférent à 2 et 3, qui sont indifférents à 1, l'on doit avoir $x_1 = \omega_1$ à l'équilibre, c'est-à-dire que l'allocation d'équilibre doit être située sur le segment [E, H]. Or, toutes les allocations de [E, G[sont (3,2)-maximales sans être (3,3)-maximales, de sorte qu'en chacun de ces points, 3 souhaite diminuer sa consommation au profit de 2, et peut le faire puisque celle-ci est strictement positive. De même, toutes les allocations de]F, H] sont (2,3)-maximales sans être (2,2)-maximales, si bien qu'en chacun de ces points, 2 souhaite diminuer sa consommation au profit de 3, et peut le faire puisqu'elle est strictement positive. Comme [E, G[U]F, G] = [E, H], il n'existe pas d'équilibre social.

Ce contre-exemple pourra paraître paradoxal au lecteur familiarisé avec le théorème général d'existence d'un équilibre pour une économie abstraite, dû à Debreu [1952]. Un examen attentif des hypothèses de ce dernier fait apparaître la cause de son échec dans l'exemple précédent : le fait que, dans certains cas de figure, les dons peuvent être arbitrairement grands sans violer aucune contrainte ni affecter les comportements. C'est ainsi par exemple qu'en tout point $(\omega_1, \omega_2 + t_{32} - t_{23}, \omega_3 + t_{23} - t_{32})$ du segment [E, H], l'on peut accroître simultanément t_{32} et t_{23} d'une même quantité positive arbitrairement grande sans violer aucune contrainte *a priori* sur la consommation ou les dons, et sans modifier les contraintes de budget. Dans le cas de la figure 5, cette possibilité offerte aux agents de surenchérir à l'infini sur les dons d'autrui est concrétisée par l'instabilité décrite plus haut, c'est-à-dire par l'inexistence d'un équilibre de Nash.

Graphique 5.



On peut trouver au moins trois issues à ce problème.

La première consiste à supposer que les ensembles de transfert T_i sont compacts. C'est l'hypothèse formulée par Kranich [1988], dont le modèle est logiquement équivalent au nôtre dans le cas particulier envisagé ici (un seul bien de consommation). Il est clair qu'alors le théorème de Debreu s'applique. Cette solution présente toutefois deux inconvénients, à notre avis rédhibitoires. Le premier est que l'existence repose alors de manière cruciale sur une formulation particulière des contraintes *a priori*, contingentes par nature. Le second est qu'en conséquence, l'équilibre ainsi obtenu pourra être très artificiel. La caractérisation de l'équilibre social proposée dans le théorème 1, en particulier ne sera plus valide.

Les deux autres solutions que nous envisageons procèdent d'une même constatation : le fait qu'existe, à l'évidence, une contrainte collective de compatibilité des dons. Il est clair, en effet, que les dons arbitrairement grands évoqués plus haut, envisageables pour les individus puisqu'ils vérifient les contraintes *a priori* et les contraintes de budget, sont néanmoins collectivement irréalisables : ce sont des dons « nominaux » ou « inflationnistes » car leur réalisation physique est impossible (songer, par exemple, au cas où :

$t_{32} = t_{23} = 2 > \sum_{i \in N} \omega_i = 1$). or, il n'existe aucun mécanisme dans notre système social, qui puisse transmettre cette contrainte collective aux agents individuels (et notamment aucun mécanisme de prix, contrairement à ce que l'on constate par exemple dans le modèle de Bergstrom, 1970, où les transferts volontaires sont coordonnés par des prix personnalisés). On est donc placé devant une alternative simple : ou bien supposer que chaque agent prend en charge individuellement la contrainte collective ; ou bien formuler une hypothèse destinée à garantir, en substance, qu'aucune guerre des dons ne viendra alimenter l'inflation des dons évoquée ci-dessus.

La première branche de l'alternative est notre seconde solution au problème d'existence. Elle permet en effet, sous des hypothèses faibles, d'appliquer le théorème de Debreu (en bornant les dons, notamment). Cette solution présente toutefois un inconvénient important. La nature très contingente et pratique de la contrainte de compatibilité des dons ne permet pas de décrire cette dernière de manière à la fois abstraite et précise. Le résultat du fonctionnement du système social sera donc, à l'image de la contrainte de compatibilité, contingent, c'est-à-dire impossible à caractériser de manière simple et abstraite. La caractérisation proposée dans le théorème 1, en particulier, ne sera plus valide.

C'est la troisième solution que nous avons donc choisie de développer dans le théorème 2.

On y démontre qu'un équilibre social existe quelle que soit la distribution initiale de la richesse, dès lors que les graphes des désirs redistributifs ne contiennent pas de circuit strict, c'est-à-dire, en substance, dès lors que toute « chaîne de bienveillance active » d'un graphe quelconque $\gamma(x)$ se termine par un agent « absorbant » qui, en x, n'est disposé à diminuer sa consommation au profit de personne.

On établit de plus que cette condition suffisante pour l'existence d'un équilibre social est satisfaite dès lors que chaque personne préfère « marginalement » sa propre ophélimité à celle de toute personne plus riche qu'elle même, c'est-à-dire formellement, dès lors que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour toute distribution x telle que $x_j \geq x_i$.

Le théorème est démontré en annexe.

Théorème 2. Soit un système social vérifiant les hypothèses de la section II et tel que pour tout i : w_i est différentiable et quasi concave ; $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout j dès lors que $x_i = 0$. Alors, pour qu'un équilibre social (resp. un optimum social) existe, il suffit qu'aucun graphe des désirs redistributifs ne contienne de circuit strict. Il suffit, en particulier, que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout couple (i, j) et toute distribution x tels que $x_j \geq x_i$.

GÉNÉRALISATION

La multiplicité des biens de consommation entraîne deux conséquences pour le fonctionnement de notre système social : la possibilité de l'échange ; et l'existence possible de désirs tutélaires, c'est-à-dire d'une sensibilité d'un agent à la structure de la consommation d'un autre agent.

Nos concepts, résultats et méthodes de démonstration se généralisent sans difficulté au cas d'une économie de don et d'échange, sous réserve de l'élimination, par une hypothèse adéquate, des désirs tutélaires des préférences sociales des agents (Jean Mercier Ythier [1989 et 1991]).

De manière plus précise, chaque agent i est à présent doté de deux fonctions d'utilité : une fonction d'utilité privée $x_i \to u_i(x_i)$, définie sur son ensemble de consommation X_i, sous-ensemble de l'espace des biens $\mathbb{R}^l$; une fonction d'utilité sociale $(x_1, ..., x_n) \to w_1(u_1(x_1), ..., u_n(x_n))$ définie sur l'ensemble des allocations, strictement croissante en u_i, dépourvue de désirs tutélaires, mais compatible avec la bienveillance, la malveillance ou l'indifférence.

Il est aisé de transposer à ce nouveau cadre d'analyse les définitions données en II et III, et en particulier celles de l'équilibre social : l'(i, j)-maximum et le graphe des désirs redistributifs ; la RPS et l'optimum social ; l'OPP (optimum privé de Pareto, ou maximum d'ophélimité pour la collectivité) et l'OSP (optimum social de Pareto, ou maximum d'utilité pour la collectivité).

Le second théorème fondamental de l'économie du bien-être permet alors d'identifier, en tout OPP x^*, la distribution du bien-être privé $(u_1(x_1^*), ..., u_n(x_n^*))$ à la distribution de la richesse consommée $(p^* x_1^*, ..., p^* x_n^*)$, en utilisant pour ce faire le vecteur-prix p^* soutenant l'OPP x^*. On rétablit ainsi localement l'identité du bien-être et de la richesse consommée, rompue par la multiplicité des biens. L'on montre par ailleurs qu'en l'absence de désirs tutélaires, un (i, j)-maximum est un OPP. La transposition de nos résultats au cas général résulte aisément de ces deux faits simples.

L'introduction des désirs tutélaires dans les préférences sociales des agents pose par contre un sérieux problème logique. Dans le fonctionnement de ce système social, calqué sur le jeu non coopératif de Nash, tout se passe en effet comme si chaque agent croyait que ses dons étaient consommés par les récipiendaires. Or cette pseudo-croyance ne peut constituer un guide efficace de l'action pour un agent qui nourrirait des désirs tutélaires, car une telle personne s'efforcerait alors de modifier par ses dons la structure de la consommation du récipiendaire, sans grande chance d'y parvenir puisque ce dernier dispose, par ailleurs, à sa guise des ressources qu'il possède (en les vendant, jetant, donnant ou consommant) quelle que soit l'origine de son droit de propriété sur ces ressources (dotation initiale, achat ou don).

Signalons pour terminer deux issues envisageables à ce problème logique. La première consiste à coordonner les choix à l'aide de prix personnalisés de Lindhal. La seconde, qui préserve notre description du système social, consiste à doter chaque agent de trois fonctions d'utilité : sa « vraie » fonction d'utilité sociale, indice ordinal de bien-être social, exhibant éventuellement des désirs tutélaires ; sa fonction d'utilité sociale opérationnelle, guide de l'action, dépourvue de désirs tutélaires ; sa fonction d'utilité privée.

CONCLUSION

Les propriétés d'optimalité et d'existence de l'équilibre général de dons individuels apparaissent, en conclusion, comme l'exact reflet des caractéristiques élémentaires de ce type de dons, et en particulier du fait qu'ils procèdent de décisions privées indépendantes.

Le lien social est ici un pur lien moral, un sentiment bienveillant ou charitable, alors qu'il prend, dans le système parétien, la double forme d'un lien moral et, dans l'esprit de la théorie de la valeur d'échange, d'un lien contractuel, manifesté par la recherche collective (guidée le cas échéant par un mécanisme de prix adéquat) du meilleur accord possible entre les points de vue des personnes subjectivement et matériellement intéressées à la redistribution de la richesse.

Il est clair, en particulier, que l'acte du donateur indépendant, mû par un sentiment qui lui est propre, et agissant librement dans les limites que lui impose le droit de propriété, est susceptible de contrarier les souhaits ou intentions d'une tierce personne (notre optimum social n'est pas un optimum de Pareto), voire du bénéficiaire du don (la conséquence peut alors être, dans certains cas, une « guerre de dons », c'est-à-dire une situation d'inexistence de l'équilibre, ou, si l'on préfère, l'impossibilité d'accorder les points de vue des donateurs indépendants).

C'est son caractère de décision unilatérale ou indépendante qui, ici, comme d'ailleurs nous semble-t-il dans le sens commun, distingue en définitive le don de l'échange, voire parfois, dans tel cas d'espèce, les oppose.

ANNEXE MATHÉMATIQUE

PROPOSITION 1

Proposition 1. On suppose que ω_i est différentiable et quasi concave quel que soit $i \in \mathrm{N}$. Alors, pour qu'une allocation $x^* \in \mathrm{X}$ soit un (i, j)-maximum il faut et il suffit que : $\sum_{k \in \mathrm{N}} x_k^* = 1$; et, ou bien $x_j^* = 0$, ou bien $w'_{ij}(x^*) \geq w'_{ik}(x^*)$ pour tout $k \in \mathrm{N}$.

Démonstration. On remarque tout d'abord qu'une allocation x^* est (i, j)-maximale si et seulement si elle résout le programme :

$$\underset{x \in \mathrm{X}}{\mathrm{Max}} \quad \{w_i(x) \mid 1 - \sum_{k \in \mathrm{N}} x_k \geq 0, x_k \geq x_k^* \, \forall k \neq j\}$$

On remarque par ailleurs que : w_i est différentiable ; les fonctions $x \to 1 - \sum_{k \in \mathrm{N}} x_k$ et $x \to x_k - x_k^*$ qui définissent les contraintes sont différentiables et quasi concaves et n'ont pas de point stationnaire dans le domaine qu'elles délimitent ; si, enfin, $x_j^* > 0$, ce domaine possède un point intérieur dans $\mathbb{R}_+^n$. Il résulte donc des théorèmes d'Arrow-Enthoven (1961) que les conditions de Kuhn et Tucker associées au programme ci-dessus sont nécessairement vérifiées en x^*, si $x^* \in \mathrm{M}_{ij}$ et si $x_j^* > 0$. Plus précisément, si $x^* \in \mathrm{M}_{ij}$ et $x_j^* > 0$, alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^n$ tels que :

$$w'_{ik}(x^*) + \beta_k = \alpha \text{ pour tout } k \in \mathrm{N}$$

$$1 - \sum_{k \in \mathrm{N}} x_k^* \geq 0, \alpha(1 - \sum_{k \in \mathrm{N}} x_k^*) = 0$$

$$x_j^* \geq 0, \beta_j x_j^* = 0$$

Comme w_i est strictement croissante en x_i, on a nécessairement $\alpha = 0$ et $1 - \sum_{k \in \mathrm{N}} x_k^* = 0$ dans le système ci-dessus. Comme par ailleurs $x_j^* > 0$ par hypothèse, on a également $\beta_j = 0$. Le système ci-dessus se réduit donc aux deux conditions nécessaires suivantes : $1-\sum_{k\in N} x_k^* = 0$; et $w'_{ij}(x^*) \geq w'_{ik}(x^*)$ pour tout $k \in N$.

Comme de plus w_i est quasi concave, une allocation $x^* \in X$ vérifiant les deux conditions ci-dessus est nécessairement solution du programme $\max_{x\in X} \{w_i(x) \mid 1-\sum_{k\in N} x_k \geq 0, x_k \geq x_k^* \forall k \neq j\}$, et donc (i, j)-maximale (Arrow-Enthoven [1961]).

Comme enfin, à l'évidence, $M_{ij} \subset K_n = \{x \in X \mid \sum_{k\in N} x_k = 1\}$ (croissance stricte de w_i en x_i et divisibilité), il nous suffit de prouver, pour terminer, que $\{x \in K_n \mid x_j = 0\} \subset M_{ij}$. Or, si $x^* \in K_n$ est telle que $x_j^* = 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid 1-\sum_{k\in N} x_k \geq 0, x_k \geq x_k^* \forall k \neq j\}$ est évidemment réduit an point x^*, qui et donc un (i, j)-maximum. CQFD.

PROPOSITION 2

Proposition 2. Supposons que w_i est continue quel que soit i. Alors, M_{ij} est un sous-ensemble fermé de $K_n = \{x \in X \mid \sum_{i\in N} x_i = 1\}$ pout tout $(i,j) \in N \times N$. Si de plus w_i est différentiable et quasi concave quel que soit i, alors, pour tout $i \in N$: $\bigcup_{j\in N} M_{ij} = K_n$; $\bigcap_{j\in N} M_{ij}$ est l'ensemble des maxima de w_i dans S_n.

Démonstration. On sait déjà que $M_{ij} \subset K_n$ pour tout $(i,j) \in N \times N$.

Montrons tout d'abord que M_{ij} est fermé quel que soit (i, j). Soit $(x^q)_{q\in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M_{ij} convergente en x^*. On a nécessairement $x^* \in K_n$. Supposons que $x^* \notin M_{ij}$, i.e. qu'il existe $\bar{x} \in K_n$, telle que : $w_i(\bar{x}) > w_i(x^*)$ et $\bar{x}_k \geq x_k^*$ pour tout $k \neq j$. Alors, par continuité de w_i, il existe $x^0 \in K_n$ tel que $w_i(x^0) > w_i(x^*)$ et $x_k^0 > x_k^*$ pour tout $k \neq j$. Et donc, il existe $q_0 \in N$ tel que, pour tout $q \geq q_0$: $x_k^q > x_k^*$ pour tout $k \neq j$ et $w_i(x^q) > w_i(x^*)$, une contradiction.

Montrons à présent que $K_n \subset \bigcup_{k \in N} M_{ij}$. Soit $x^* \in K_n$. Si $x_j^* = 0$, alors $x^* \in M_{ij}$ (proposition 1). Supposons donc $x_k^* > 0 \forall k \in N$, et notons j un élément de N tel que $w'_{ij}(x^*) \geq w'_{ik}(x^*)$ pour tout $k \in N$ (il existe évidemment au moins un tel j). Il résulte alors de la proposition 1 que $x^* \in M_{ij}$, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons, pour conclure, que $\bigcap_{j \in N} M_{ij}$ est l'ensemble des maxima de w_i dans S_n. On note A ce dernier. Il résulte immédiatement de la définition d'un (i, j)-maximum que $A \subset \bigcap_{j \in N} M_{ij}$. Soit, à présent x^* une allocation (i, j)-maximale pour tout j. Il résulte de la proposition 1 que : $x^* \in K_n$; et il existe un réel $c > 0$ tel que $w'_{ij}(x^*) = c$ pour tout $j \in N$ tel que $x_j^* w > 0$. Mais alors les théorèmes d'Arrow-Enthoven impliquent que x^* maximise w_i dans S_n. CQFD.

PROPOSITION 3

Proposition 3. Si w_i est continûment différentiable et quasi concave pour tout i, et s'il existe une allocation x telle que $\gamma(x)$ contient un circuit strict, alors R possède un cycle.

Démonstration. Soit $((i_k, j_k))_{1 \leq k \leq m}$ un circuit strict de $\gamma(x^*)$. On peut poser sans perte de généralité $i_k = k$, $j_k = k + 1$ pour tout $k \in \{1, ..., m-1\}$, $i_m = m$, $j_m = 1$. On a donc : $x^* \in M_{kk+1}$ et $x^* \notin M_{kk}$ pour tout $k = 1, ..., m - 1$; $x^* \in M_{m1}$ et $x^* \notin M_{mm}$.

Il résulte de la proposition 1 et du fait que $x^* \notin M_{kk}$ quel que soit k, que $x_k^* > 0$ pour tout $k = 1, ..., m$. L'on déduit alors de la proposition 1 que : $w'_{kk}(x^*) < w'_{kk+1}(x^*)$ pour tout $k = 1, ..., m-1$ et $w'_{mm}(x^*) < w'_{m1}(x^*)$ (l'inégalité est stricte car $x^* \notin M_{kk}$).

Soient $k \in \{1, ..., m-1\}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. On note $x^k(\varepsilon)$ l'allocation définie par : $x_1^k(\varepsilon) = x_1^* - \varepsilon, x_{k+1}^k(\varepsilon) = x_{k+1}^* + \varepsilon, x_i^k(\varepsilon) = x_i^*$ pour tout $i \neq 1, k+1$, c'est-à-dire l'allocation obtenue à partir de x^* en transférent ε de 1 à $k + 1$. On pose de plus $x^m = x^0 = x^*$. La suite $(x^k)_{0 \leq k \leq m}$ est donc obtenue en faisant circuler ε unités de la consommation de 1, d'agent en agent le long du circuit, jusqu'à ce qu'elles retournent à 1. La suite $(x^k)_{0 \leq k \leq m}$ est bien définie pour tout

$\varepsilon \leq \operatorname{Min}_{1 \leq k \leq m} x_k^*$ (on rappelle que $\operatorname{Min}_{1 \leq k \leq m} x_k^* > 0$).

Posons $g_k(\varepsilon) = w_k(x^k(\varepsilon)) - w_k(x^{k-1}(\varepsilon))$, pour $k \in \{1, ..., m\}$. Notons $g'_k(\varepsilon)$ la dérivée de g_k en ε. On a :

$$g'_1(\varepsilon) = w'_{12}(x^1(\varepsilon)) - w'_{11}(x^1(\varepsilon))$$
$$g'_k(\varepsilon) = w'_{kk+1}(x^k(\varepsilon)) - w'_{kk}(x^{k-1}(\varepsilon)),\ k = 2, ..., \text{m-1}$$
$$g'_m(\varepsilon) = w'_{m1}(x^{m-1}(\varepsilon)) - w'_{mm}(x^{m-1}(\varepsilon))$$

Mais alors il résulte des inégalités établies plus haut que $g'_k(0) > 0$ pour tout $k = 1, ..., m$. Dès lors, il existe $\alpha > 0$ tel que $g'_k(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon \in [0, \alpha[$ et tout $k \in \{1, ..., m\}$ (différentiabilité continue des fonctions d'utilité sociales). En d'autres termes, les fonctions g_k sont toutes strictement croissantes dans $[0, \alpha[$. Comme par ailleurs $g_k(0) = 0$ pour tout k, il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout k $g_k(\varepsilon_0) > 0$. On en déduit que $(x^k(\varepsilon_0))_{0 \le k \le m}$ est un cycle de la RPS. CQFD.

THÉORÈME 1

Théorème 1. Si t^* est un équilibre social, alors : $x(t^*) \in$ M (optimalité) et $g(t^*) \subset \gamma(x(t^*))$ (complémentarité). Réciproquement, si, pour tout i, w_i est quasi concave et différentiable, et si $w'_{ii}(x) \ge w'_{ij}(x)$ dès lors que $x_i = 0$, alors tout vecteur-dons $t^* \in$ T tel que, $x(t^*) \in$ M et $g(t^*) \subset \gamma(x(t^*))$ est un équilibre social.

Démonstration

(i) Montrons la première partie. Soient t^* un équilibre social et x^* l'allocation $(\omega_i + \Delta_i t^*)_{i \in \mathrm{N}} = x(t^*)$. On veut montrer que : $x^* \in$ M, i.e. est (i, i)-maximale pour tout $i \in$ N ; $g(t^*) \subset \gamma(x^*)$, i.e., $t^*_{ij} > 0 \Rightarrow x^* \in \mathrm{M}_{ij}$. Procédons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $i \in$ N tel que $x^* \notin \mathrm{M}_{ii}$, et donc qu'il existe $\bar{x} \in \mathrm{K}_n$ telle que : $\bar{x}_k \ge x^*_k$ pour tout $k \ne i$, et $w_i(\bar{x}) > w_i(x^*)$. Il est clair qu'alors il existe $\bar{t}_i \in \mathrm{T}_i$ tel que $\bar{x} = x((t^*_{n/i}, \bar{t}_i))$, une contradiction.

Supposons ensuite qu'il existe (i, j) dans N × N tel que $t^*_{ij} > 0$ et $x^* \notin \mathrm{M}_{ij}$. Alors, il existe $\bar{x} \in \mathrm{K}_n$ telle que : $\bar{x}_k \ge x^*_k$ pour tout k ≠ j, et $w_i(\bar{x}) > w_i(x^*)$. Mais alors il est clair qu'il existe $\bar{t}_i \in \mathrm{T}_i$ tel que $\bar{x} = x((t^*_{n/i}, \bar{t}_i))$, une contradiction. CQFD.

(ii) Montrons la seconde partie. Soit $t^* \in$ T un vecteur-dons, et $x^* = x(t^*) = (\omega_i + \Delta_i t^*)_{i \in \mathrm{N}}$ l'allocation associée. On suppose que $x^* \in$ M et

$g(t^*) \subset \gamma(x^*)$, et l'on veut montrer que t^* est un équilibre social, c'est-à-dire que t_i^* maximise $w_i = (x((t^*_{n/i}, t_i)))$ dans $\{t_i \in T_i | \omega_i + \Delta_i(t^*_{n/i}, t_i) \in X_i\}$ quel que soit i. On va utiliser pour cela la proposition 1 et les théorèmes d'Arrow-Enthoven.

D'après la proposition 1 et l'hypothèse que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout (i, j) et tout x tels que $x_i = 0$, on a nécessairement, pour tout (i, j) : $w'_{ii}(x^*) \geq w'_{ij}(x^*)$ puisque $x^* \in$ M ; et $(w'_{ii}(x) - w'_{ij}(x))\, t^*_{ij} = 0$ puisque $g(t^*) \subset \gamma(x^*)$.

Les conditions de Kuhn et Tucker caractérisent par ailleurs les solutions du programme de maximisation de l'utilité individuelle écrit ci-dessus (Arrow-Enthoven). Elles s'écrivent, en t_i^* , pour chaque i :

$$-w'_{ii}(x^*) - \delta_i + w'_{ij}(x^*) + \mu_{ij} = 0 \ \forall j \in \mathrm{N}$$
$$\mu_{ij} t^*_{ij} = 0,\ \mu_{ij} \geq 0,\ \forall j \in \mathrm{N}$$
$$\delta_i x_i^* = 0,\ \delta_i \geq 0$$

Sous l'hypothèse, à nouveau, que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout (i, j) et tout x tels que $x_i = 0$, le système se réduit aux conditions nécessaires et suffisantes suivantes : pour tout $j \in$ N, $w'_{ii}(x^*) \geq w'_{ij}(x^*)$ et $(w'_{ii}(x^*) - w'_{ij}(x^*))\, t^*_{ij} = 0$. D'où la conclusion. CQFD.

THÉORÈME 2

Théorème 2. Soit un système social vérifiant les hypothèses de la section II et tel que pour tout i : wi est différentiable et quasi concave ; $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout j dès lors que $x_i = 0$. Alors, pour qu'un équilibre social (resp. un optimum social) existe, il suffit qu'aucun graphe des désirs redistributifs ne contienne de circuit strict. Il suffit, en particulier, que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout couple (i, j) et tout distribution x tels que $x_j \geq x_i$.

Démonstration

(i) Montrons la première partie du théorème.

Soit $\bar{x}$ un élément quelconque de K_n. On note $\varphi(\bar{x})$ l'ensemble $\{x \in X | \exists t \in T$ tel que $x = x(t), x_i = 0$ si $\bar{x} \notin M_{ii}, t_{ij} = 0$ si $\bar{x} \notin M_{ij}\}$. Par construction, $0(\bar{x})$ est un sous-ensemble, éventuellement vide, de K_n. On note φ la correspondance qui, à chaque élément x de K_n, associe le sous-ensemble $\varphi(x)$ de K_n. On va montrer que, sous nos hypothèses : un point fixe de la correspondance φ est une allocation d'équilibre ; φ possède un point fixe.

Montrons tout d'abord que si $x^* \in \varphi(x^*)$, alors x^* est une allocation d'équilibre, c'est-à-dire qu'il existe un équilibre social t^* tel que $x^* = x(t^*)$. Soit donc $x^* \in \varphi(x^*)$. Par construction de φ, il existe $t^* \in$ T tel que : $x^* = x(t^*)$, $x_i^* = 0$ si $x^* \notin M_{ii}$, $t_{ij}^* = 0$ si $x^* \in M_{ij}$. Or $x^* \in K_n$ et $x_i^* = 0$ implique $x^* \in M_{ii}$ (proposition 1). Donc $x^* \in M$, $g(t^*) \subset \gamma(x^*)$, et l'on conclut grâce au théorème 1.

Montrons à présent que φ possède un point fixe. Il suffit pour cela, d'après le théorème de Kakutani, de démontrer que les valeurs de φ sont non vides, compactes et convexes, et que φ est hémi-continue supérieurement (hcs). Rappelons tout d'abord qu'étant donné $\bar{x} \in K_n$, les éléments de $\varphi(\bar{x})$ sont construits en appliquant au vecteur des dotations initiales un vecteur-dons $\bar{t}$ tel que, si $x \notin M_{ii}$, l'agent i donne tout ce qu'il possède ($\omega_i + \Delta_i \bar{t} = 0$) à l'un au moins des agents auxquels il est relié dans le graphe $\gamma(\bar{x})$ des désirs redistributifs en $\bar{x}$ (puisque $\bar{t}_{ij} = 0$ si $\bar{x} \notin M_{ij}$). Un instant de réflexion convaindra le lecteur que l'hypothèse d'absence de circuit strict dans $\gamma(\bar{x})$ combinée au fait que $K_n = \bigcup_{j \in N} M_{ij}$ pour tout i (proposition 2) impliquent l'existence d'au moins un tel vecteur-dons $\bar{t}$, et donc que $\varphi(x) \neq \varphi$ quel que soit $x \in K_n$. La compacité et la convexité des valeurs de φ sont par ailleurs immédiates. Il reste donc à prouver que φ est hcs. Considérons pour cela une suite convergent $(x^q, t^q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $K_n \times T$, tels que pour tout q, $x(t^q) \in \varphi(x^q)$, et notons (x^*, t^*) sa limite. On veut montrer que $x^* \in \varphi(x^*)$. Or cela découle immédiatement du fait que sous nos hypothèses M_{ij} est fermé pour tout $(i, j) \in N \times N$. CQFD.

(ii) Montrons la seconde partie. On veut, de manière plus précise, établir que les graphes des désirs redistributifs ne contiennent pas de circuit strict dès lors que $w'_{ii}(x) \geq w'_{ij}(x)$ pour tout (i, j) et tout x tels que $x_j \geq x_i$. Supposons, au contraire, que cette dernière condition sur les fonctions d'utilité individuelles est vérifiée, et qu'un graphe $\gamma(x^*)$ contient un circuit strict $((i_k, j_k))_{0 \leq k \leq m}$. On a alors nécessairement, d'après la proposition 1, $x_{i_0}^* > x_{i_1}^* > ... > x_{i_0}^*$, ce qui est contradictoire. CQFD.

Février 1993

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARROW K.-J., ENTHOVEN A.-C. [1961] « Quasiconcave Programming », *Econometrica*, octobre, p. 779-800.

BERGSTROM T.-C. [1970], « A Scandinavian Consensus Solution for Efficient Income Distribution Among Non-Malevolent Consumers », *Journal of Economic Theory*, 2, p. 383-386.

BERGSTROM T.-C. [1975], « Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets », *Journal of Economic Theory*, 10, p. 403-404.

CAZENAVE P., MORRISSON C. [1978], *La distribution des revenus*, Paris, Economica.

DEBREU G. [1952], « A Social Equilibrium Existence Theorem » dans *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38, p. 886-893.

HOCHMAN A.-M., RODGERS J.-D. [1969], « Pareto Optimal Redistribution », *American Economic Review*, p. 542-557.

KOLM S.-C. [1966], « La production optimale de justice sociale », Conférence de l'AISE, Biarritz, *Economie publique*, Paris, Éditions du CNRS, 1968,

KOLM S.-C. [1984], *La bonne économie : la réciprocité générale*, Paris, PUF.

KRANICH L.-I. [1988], « Altruism and Efficiency : a New Welfare Analysis of the Walrasian Mechanism with Transfers », *Journal of Public Economics* (août).

MERCIER YTHIER J. [1989], *Équilibre général et don*, thèse, Institut d'études politiques, Paris.

MERCIER YTHIER J. [1991], « General Equilibrium of Gift and Trade : Optimality, Decentralization, Existence », Working Paper n° 5, Paris, LAMIA, Université Paris I.

RADER T. [1980], « The Second Theorem of Welfare Economics When Utilities Are Interdependent », *Journal of Economic Theory*, 23, p. 420-424.