Université François-Rabelais
Droit - Economie - Sciences Sociales
Tours

Année universitaire :	2017-2018
Session :	première session du premier semestre
Année d'étude :	M1
	Sciences Economiques
Discipline :	***Economie Avancée***
	(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1.2)
Titulaire du cours :	M. Olivier CARDI

- Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
- Entourez la bonne réponse avec un stylo rouge.
- Chaque bonne réponse dans les exercices donne 1 point, l'absence de réponse 0 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

1 Détermination de la position extérieure nette (3 points)

On considère une petite économie ouverte composée d'un consommateur représentatif. Ce consommateur qui vit deux périodes notées 1 et 2 détient une richesse financière $A_t = B_t$ à la période $t = 0{,}1{,}2$ composée d'avoirs nets étrangers B_t. Pour simplifier, on suppose que la position extérieure nette initiale du pays est nulle, c'est-à-dire $B_0 = 0$. On impose la condition suivante:

$$A_2 = B_2 = 0. \tag{1}$$

Le stock de richesse financière détenue par l'individu à la période 1 s'écrit donc:

$$A_1 = B_1. \tag{2}$$

Le taux d'intérêt mondial (exogène) est noté r.

L'agent représentatif consomme une quantité C_1 à la période 1 et une quantité C_2 à la période 2 aboutissant à un bien-être intertemporel décrit par:

$$\Lambda \equiv (C_1)^{1/2} + (C_2)^{1/2}. \tag{3}$$

Les revenus du ménage représentatif sont composés des intérêts du fait de la détention de richesse financière rémunérée au taux r plus la dotation Y_i à la période $i = 1{,}2$. Les contraintes budgétaires du ménage représentatif aux périodes 1 et 2 s'écrivent donc:

$$C_1 = Y_1 - A_1, \tag{4a}$$

$$C_2 = (1 + r)\ .A_1 + Y_2. \tag{4b}$$

On note Ω la somme actualisée des revenus:

$$\Omega = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}. \tag{5}$$

1. Ecrivez au préalable la contrainte budgétaire intertemporelle en utilisant (4a) et (4b). Résolvez le problème de maximisation intertemporelle en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle et l'utilité intertemporelle (3). Déterminez l'égalité entre le prix subjectif et le prix relatif de la consommation présente:
   A) $\frac{C_2}{C_1} = 1+r$, B) $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 = 1+r$, C) $\frac{C_2}{C_1} = 2\,.\,(1+r)$, D) $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2} = 1+r$
   Réponse : D). Pour écrire la contrainte budgétaire intertemporelle, on élimine A_1 de la contrainte budgétaire (4a) en utilisant (4b), cad $A_1 = \frac{C_2 - Y_2}{1+r}$, que l'on substitue dans (4a):
   $$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = \Omega. \tag{6}$$
   Le programme de maximisation intertemporelle se réduit au choix de C_1 et éliminant C_2 de (3) en utilisant (6):
   $$\max_{C_1} \left(C_1\right)^{1/2} + \left[(1+r)\ .\left(\Omega - C_1\right)\right]^{1/2}. \tag{7}$$
   En différentiant (7) par rapport à C_1 et en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité entre le prix subjectif de la consommation présente (TMS intertemporel) et le prix relatif de la consommation présente sur le marché:
   $$\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2} = 1+r. \tag{8}$$

2. Déterminez l'élasticité de substitution intertemporelle notée σ:
   A) $\sigma = \frac{1}{2}$, B) $\sigma = 2$, C) $\sigma = 1$, D) $\sigma = 0$
   Réponse : B). Pour déterminer l'élasticité de substitution intertemporelle, il suffit d'appliquer le logarithme à gauche et à droite de (8) et de différentier:
   $$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= (1+r)^2, \\ \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) &= 2\,.\ln(1+r). \end{aligned} \tag{9}$$
   L'élasticité de substitution intertemporelle indique de combien augmente C_2/C_1 lorsque $1+r$ s'élève d'1%. Elle est égale à 2, c'est-à-dire:
   $$\frac{d\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)}{d\,(1+r)} = 2. \tag{10}$$

3. Déterminez la consommation optimale à la période 1 en utilisant votre réponse à la question 1):
   A) $C_1 = \frac{\Omega}{2}$, B) $C_1 = \frac{\Omega}{2+r}$, C) $C_1 = \frac{\Omega}{3}$, D) $C_1 = \frac{\Omega}{(2+r)^{1/2}}$
   Réponse : B). D'après (8), on a:
   $$\frac{C_2}{1+r} = C_1\,.\,(1+r). \tag{11}$$

En éliminant C_2 de la contrainte budgétaire intertemporelle (6) à l'aide de (11), on obtient:

$$\begin{aligned} C_1 + C_1 \,.\, (1+r) &= \Omega, \\ C_1 = \frac{\Omega}{2+r}. \end{aligned} \tag{12}$$

4. On note $g^\star$ la croissance économique mondiale et g la croissance économique de la petite économie ouverte. On suppose que $Y_1 = Y$ et $Y_2 = (1+g)\ .Y$ avec

$$(1+g) = (1+g^\star)^2\,. \tag{13}$$

En utilisant votre réponse à la question précédente ainsi que (4a) et (13), déterminez l'expression de la position extérieure nette de la petite économie ouverte en % du PIB notée $b_1 = B_1/Y$:

A) $b_1 = \frac{(r+g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}$, B) $b_1 = \frac{(r-g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}$, C) $b_1 = (r-g^\star)\ .\frac{(r+g^\star)}{(2+r)\ .(1+r)}$, D) $b_1 = (r-g^\star)\ .\frac{(2+r+g^\star)}{(2+r)\ .(1+r)}$

Réponse : D). En substituant (12) dans (4a), puis en utilisant (13), on obtient

$$\begin{aligned} B_1 &= Y_1 - \left[\frac{Y_1}{2+r} + \frac{Y_2}{(2+r)\ .(1+r)}\right], \\ &= \frac{Y\ .(1+r)}{2+r} - \frac{Y\ .(1+g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}, \\ &= \frac{(1+r)^2 - (1+g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}\ .Y, \\ \frac{B_1}{Y} &= \frac{[(1+r)-(1+g^\star)]\ .[(1+r)+(1+g^\star)]}{(2+r)\ .(1+r)}, \\ b_1 &= (r-g^\star)\ .\frac{(2+r+g^\star)}{(2+r)\ .(1+r)}. \end{aligned} \tag{14}$$

2 Exercice: Imposition et transferts dans le modèle à générations imbriquées (17 points)

On considère une économie fermée où les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population L_t croît à un taux constant n:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)\,. \tag{15}$$

L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle Λ_t la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \beta\ .\ln\left(C_{t+1}^O\right), \tag{16}$$

où le paramètre $\beta = \frac{1}{1+\rho} > 0$ représente le facteur d'actualisation, avec ρ le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t. L'individu reçoit également des transferts de l'Etat d'un montant forfaitaire T_t. Les revenus sont dépensés en biens de consommation C_t^Y, le reste est épargné S_t.

Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt notés $r_{t+1}\ .S_t$ de son épargne S_t avec r_{t+1} le taux d'intérêt prévalant à la date $t+1$. L'épargne du ménage réprésentatif est composée de titres de créance sur le capital physique. L'individu âgé consacre intégralement son épargne et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^{O}. Les contraintes budgétaires sont donc décrites par:

$$C_t^Y + S_t = W_t + T_t, \tag{17a}$$

$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})\ .S_t. \tag{17b}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital, K_t, et du travail, L_t, selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante:

$$Y_t = (K_t)^{\alpha}\ .(L_t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{18}$$

On note W_t le taux de salaire et $R_t = r_t + \delta$ le coût du capital. Pour amener le capital au niveau optimal et amortir le capital, l'économie doit investir à chaque période un montant I_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta\ .K_t, \tag{19}$$

où δ est le taux de dépréciation du capital physique.

On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite. La production du bien final, Y_t, est vendue au prix P_t normalisé à 1. La production du bien final est destinée à la consommation des travailleurs et des retraités, c'est-à-dire $C_t = L_t\ .C_t^Y + L_{t-1}\ .C_t^O$, et à l'investissement I_t:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{20}$$

Enfin, pour financer le transfert T_t vers le ménage représentatif, l'Etat prélève un montant $\tau\ .Y_t$ du chiffre d'affaire de la firme représentative, permettant ainsi de maintenir l'équilibre budgétaire:

$$L_t\ .T_t = \tau\ .Y_t. \tag{21}$$

1. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle puis déterminez l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente en résolvant le programme de maximisation intertemporelle:
   A) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = 1 + r_{t+1}$, B) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y}\ .\frac{1}{\beta} = 1 + r_{t+1}$, C) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y}\ .\frac{1}{1+\beta} = 1 + r_{t+1}$, D) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y}\ .\beta = 1 + r_{t+1}$
   Réponse : B). Pour déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut éliminer S_t des contraintes budgétaires. A cette fin, en utilisant (17b), on obtient: $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}$. Puis en substituant cette expression dans (17a), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t + T_t. \tag{22}$$

On élimine la consommation future C^O_{t+1} de l'utilité intertemporelle (16) en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle (22), c'est-à-dire $C^O_{t+1} = (1+r_{t+1})\left(W_t + T_t - C^Y_t\right)$:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C^Y_t\right) + \beta \ln\left[(1+r_{t+1})\ .\left(W_t + T_t - C^Y_t\right)\right]. \tag{23}$$

En différentiant par rapport à C^Y_t et en annulant la dérivée partielle, on obtient l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporel et le prix relatif de la consommation présente:

$$\frac{C^O_{t+1}}{C^Y_t} = \beta\ .\ (1+r_{t+1}) \tag{24}$$

2. En utilisant votre réponse à la question précédente, déterminez l'expression du montant optimal d'épargne S_t en fonction du salaire W_t:
   A) $S_t = \frac{\beta}{1+\beta}\ .\ (W_t + T_t)$, B) $S_t = \frac{1}{1+\beta}\ .\ (W_t + T_t)$, C) $S_t = \frac{1}{1-\beta}\ .\ (W_t + T_t)$, D) $S_t = \beta\ .\ (W_t + T_t)$
   Réponse : A). En éliminant C^O_{t+1} de la contrainte budgétaire intertemporelle (22) en utilisant la condition du premier order (24), on obtient la consommation optimale du travailleur en fonction du revenu disponible $W_t + T_t$:

$$C^Y_t = \frac{1}{1+\beta}\ .\ (W_t + T_t), \tag{25}$$

   Pour déterminer l'épargne optimale, on substitue (25) dans la contrainte budgétaire (24):

$$\begin{aligned} S_t &= (W_t + T_t) - \frac{1}{1+\beta}\ .\ (W_t + T_t), \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\ .\ (W_t + T_t). \end{aligned} \tag{26}$$

3. On note $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ le capital par travailleur. En écrivant au préalable le profit de la firme et en résolvant le programme de maximisation de la firme, déterminez le salaire réel:
   A) $W_t = (1-\tau)\ .\ (1-\alpha)\ .\ (k_t)^{\alpha-1}$, B) $W_t = (1-\tau)\ .\ (1-\alpha)\ .\ (k_t)^{\alpha}$, C) $W_t = \frac{(1-\alpha)}{(1-\tau)}\ .\ (k_t)^{\alpha}$, D) $W_t = (1-\tau)\ .\alpha\ .\ (k_t)^{1-\alpha}$
   Réponse : B). En utilisant (18), le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t\ .Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production:

$$\Pi_t \equiv (1-\tau)\ .\ (K_t)^{\alpha}\ .\ (L_t)^{1-\alpha} - W_t\ .L_t - R^{\star}\ .K_t. \tag{27}$$

   En différentiant (27) par rapport à L_t, on obtient l'égalité habituelle entre la productivité marginale du travail et le salaire réel:

$$\begin{aligned} W_t &= (1-\tau)\ .\ (1-\alpha)\ .\ (K_t)^{\alpha}\ .\ (L_t)^{-\alpha}, \\ &= (1-\tau)\ .\ (1-\alpha)\ (k_t)^{\alpha}, \\ &= (1-\tau)\ .\ (1-\alpha)\ (k_t)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{28}$$

4. En utilisant votre réponse à la question précédente et en écrivant au préalable la production par travailleur, $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$, déterminez la part distributive du travail, notée α_L:

A) $\alpha_L = (1-\alpha)$, B) $\alpha_L = \alpha$, C) $\alpha_L = (1-\alpha)(1-\tau)$, D) $\alpha_L = \alpha(1-\tau)$

Réponse : C). La part distributive du travail correspond à la part de la rémunération du travail dans la valeur ajoutée, c'est-à-dire $\alpha_L = \frac{W_t L_t}{Y_t}$. La part distributive du travail peut être réécrite en divisant le numérateur et le dénominateur par L_t:

$$\alpha_L = \frac{W_t}{\frac{Y_t}{L_t}} = \frac{W_t}{y_t} \tag{29}$$

En utilisant la propriété de rendements d'échelle constants, la production par travailleur est égale à:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = k_t^{\alpha}. \tag{30}$$

En substituant (28) et (30) dans (29), on obtient:

$$\begin{aligned} \alpha_L &= \frac{(1-\tau)\ .(1-\alpha)\ (k_t)^{\alpha}}{(k_t)^{\alpha}}, \\ &= (1-\tau)\ .(1-\alpha). \end{aligned} \tag{31}$$

5. Déterminez l'expression du taux d'intérêt (réel) à la date t, r_t, à partir de la maximisation du profit:

   A) $r_t = (1-\tau)\ .\alpha\ (k_t)^{1-\alpha} - \delta$, B) $r_t = (1-\tau)\ .\alpha\ (k_t)^{\alpha} - \delta$, C) $r_t = (1-\tau)\ .\alpha\ (k_t)^{\alpha-1} - \delta$, D) $r_t = \frac{\alpha}{1-\tau}\ (k_t)^{\alpha-1} - \delta$

   Réponse : C). En différentiant (27) par rapport à L_t, on obtient l'égalité habituelle entre la productivité marginale du travail et le salaire réel:

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\tau)\ .\alpha\ .(K_t)^{\alpha-1}\ .(L_t)^{1-\alpha} - \delta, \\ &= (1-\tau)\ .\alpha\ (k_t)^{\alpha-1} - \delta. \end{aligned} \tag{32}$$

6. Le théorème d'Euler et la propriété de rendements d'échelle constants implique l'égalité suivante:

   A) $Y_t = R_t\ .K_t + W_t\ .L_t$, B) $Y_t = 1 - \frac{R_t\ .K_t + W_t\ .L_t}{\tau}$, C) $(1-\tau)\ .Y_t = R_t\ .K_t + W_t\ .L_t$; D) $Y_t = (1-\tau)\ .(R_t\ .K_t + W_t\ .L_t)$

   Réponse : C). Le théorème d'Euler imlique

$$Y_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\ .K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\ .K_t. \tag{33}$$

   En multipliant les membres de gauche et de droite par $1-\tau$, et en utilisant les conditions du premier ordre du problème de maximisation du profit de la firme, on obtient:

$$\begin{aligned} (1-\tau)\ .Y_t &= (1-\tau)\ .\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\ .K_t + (1-\tau)\ .\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\ .K_t, \\ &= R_t\ .K_t + W_t\ .L_t. \end{aligned} \tag{34}$$

7. En utilisant le fait que les retraités nés à la date $t-1$ ont accumulé une épargne totale constituée de capital physique, K_t et rémunérée au taux $1+r_t$, et en évaluant la consommation des travailleurs à la date t à l'aide de (17a), calculez la consommation totale, C_t. Puis

en substituant C_t et I_t décrit par (19) dans (20), et en utilisant (21), déterminez l'équilibre sur le marché des capitaux:

A) $L_t\ .S_t = K_{t+1}$, B) $L_t\ .(S_t + T_t) = K_{t+1}$, C) $L_t\ .S_t\ .(1-\tau) = K_{t+1}$, D) $S_t = K_{t+1}$

Réponse: A). En utilisant le fait les retraités nés à la date $t-1$ ont une accumulé une épargnée égale $L_{t-1}\ .S_{t-1} = K_t$ rémunérée au taux $1+r_t$, la consommation des retraités à la date t est égal à $L_{t-1}\ .C_t^O = (1+r_t)\ .L_{t-1}S_t = (1+r_t)\ .K_t$. D'après (17a), la consommation des travailleurs à la date t est égale à $L_t\ .C_t^Y = L_t\ .(W_t + T_t) - L_t\ .S_t$. En substituant la consommation totale ainsi que l'investissement décrit par (19) dans (20), l'équilibre sur le marché des biens et services peut être réécrit

$$\begin{aligned} Y_t &= L_t\ .C_t^Y + L_{t-1}\ .C_t^O + I_t, \\ Y_t &= (1+r_t)\ .K_t + L_t\ .W_t + L_t\ .T_t - L_t\ .S_t + K_{t+1} - K_t + \delta\ .K_t, \\ (1-\tau)\ .Y_t &= L_t\ .W_t + (r_t+\delta)\ .K_t - L_t\ .S_t + K_{t+1}, \\ L_t\ .S_t &= K_{t+1}, \end{aligned} \tag{35}$$

où la troisième ligne est obtenue en utilisant (34) et la quatrième ligne est obtenue en utilisant (21).

8. En utilisant (18) et (21), exprimez les transferts par travailleur, T_t, en fonction du capital par travailleur, k_t:

   A) $T_t = \tau\ .k_t^{1-\alpha}$, B) $T_t = \tau\ .k_t^{\alpha}$, C) $Y_t = \tau\ .\alpha\ .k_t^{\alpha}$, D) $Y_t = \tau\ .(1-\alpha)\ .k_t^{\alpha}$

   Réponse: B). En utilisant (30) et (21), le taux de taxe peut s'écrire comme une fonction du capital par travailleur:
$$T_t = \tau\ .\frac{Y_t}{L_t} = \tau\ .k_t^{\alpha}. \tag{36}$$

9. En utilisant vos réponses aux questions 2) et 3), ainsi que votre réponse à la question précédente, montrez que l'épargne par travailleur s'écrit:
$$S_t = \frac{\beta}{1+\beta}\ .\left[(1-\alpha) + \alpha\ .\tau\right]\ .(k_t)^{\alpha}. \tag{37}$$

   Réponse: En substituant le salaire (28) et le transfert (36) dans l'épargne par travailleur (26), on obtient:
$$\begin{aligned} S_t &= \frac{\beta}{1+\beta}\ .(W_t + T_t), \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\ .\left[(1-\tau)\ .(1-\alpha)\ (k_t)^{\alpha} + \tau\ .\frac{Y_t}{L_t}\right], \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\ .\left[(1-\tau)\ .(1-\alpha) + \tau\right](k_t)^{\alpha}, \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\ .\left[(1-\alpha) + \alpha\ .\tau\right]\ .(k_t)^{\alpha}, \end{aligned} \tag{38}$$

10. En utilisant l'équilibre sur le marché des capitaux déterminée à la question 7) et votre réponse à la question précédente, montrez que le capital par travailleur à long terme, $\tilde{k}$, est décrit par:
$$\tilde{k} = \left\{\frac{\beta\ .\left[(1-\alpha) + \alpha\ .\tau\right]}{(1+\beta)\ .(1+n)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{39}$$

Réponse : En divisant les membres de gauche et de droite de l'équilibre sur le marché des capitaux par L_t et en utilisant (16), on obtient:

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{L_{t+1}}{L_t} \cdot \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}, \\ &= (1+n)\ .k_{t+1}. \end{aligned} \tag{40}$$

En égalisant (38) et (40), le capital par travailleur de long terme est égal à:

$$\begin{aligned} (1+n)\ .\tilde{k} &= \frac{\beta}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha)+\alpha\ .\tau] \left(\tilde{k}\right)^{\alpha}, \\ \tilde{k} &= \left\{ \frac{\beta \cdot [(1-\alpha)+\alpha\ .\tau]}{(1+\beta)\ .(1+n)} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{41}$$

11. On note $\tilde{y}$ la production par travailleur à long terme. En utilisant la constance dans le temps de $\tilde{y}$, calculez la proportion dans laquelle le PIB réel croît à long terme, $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$:
A) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n$, B) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n+\delta$, C) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1-\tau)$, D) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1+n$
Réponse : D). En utilisant le fait que $Y_t = L_t\ .\tilde{y}$ et $Y_{t+1} = L_{t+1}\ .\tilde{y}$, et en substituant (15) dans $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{L_{t+1}}{L_t}, \\ &= 1+n. \end{aligned} \tag{42}$$

12. En utilisant (37), montrez que le taux d'épargne, $s = \frac{L_t\ .S_t}{Y_t}$ s'écrit:

$$s = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha)+\alpha\ .\tau]\,. \tag{43}$$

Réponse : Le taux d'épargne, $s = \frac{L_t\ .S_t}{Y_t}$, est obtenu en rapportant l'épargne par travailleur, S_t, à la production par travailleur, $y_t \equiv Y_t/L_t = k_t^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} s &= \frac{S_t}{y_t}, \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha)+\alpha\ .\tau]\,. \end{aligned} \tag{44}$$

13. D'après (39), en utilisant (43), une hausse du taux d'imposition sur la valeur ajoutée, τ:
A) augmente la productivité marginale du capital et donc $\tilde{k}$, B) élève le salaire et donc $\tilde{k}$, C) diminue la productivité marginale du capital et réduit $\tilde{k}$, D) accroît l'épargne et donc $\tilde{k}$
Réponse : D). L'expression du capital par travailleur de long terme (41) montre que le taux d'imposition sur la valeur ajoutée élève $\tilde{k}$. D'après l'expression du taux d'épargne (42), bien qu'une hausse du taux d'imposition sur la valeur ajoutée diminue le salaire, en élevant les transferts, le taux d'impositon sur la valeur ajoutée accroît le taux d'épargne.

14. En utilisant le fait qu'à long terme, $k_t = k_{t+1} = \tilde{k}$, montrez que l'investissement par travailleur s'écrit:

$$\frac{I_t}{L_t} = (n+\delta)\ .\tilde{k}. \tag{45}$$

Réponse : La constance dans le temps du capital par travailleur à long terme implique:

$$\tilde{k} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{K_t}{L_t}. \tag{46}$$

En utilisant (15), la relation (46) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= \frac{L_{t+1}}{L_t} \, .K_t, \\ &= (1+n) \ .K_t. \end{aligned} \tag{47}$$

En substituant (47) dans (19) on obtient l'investissement par travailleur à long terme:

$$\begin{aligned} I_t &= (1+n) \ .K_t - K_t + \delta \ .K_t, \\ &= (n+\delta) \ .K_t, \end{aligned} \tag{48}$$

Et en divisant par L_t, on obtient l'investissement par travailleur à long terme:

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{L_t} &= (n+\delta) \ .\frac{K_t}{L_t}, \\ &= (n+\delta) \ .\tilde{k}. \end{aligned} \tag{49}$$

15. En utilisant votre réponse à la question précédente et l'équilibre du marché des biens et services (20), en vous plaçant à long terme, montrez que la consommation par travailleur, $c = C_t/L_t$, s'écrit:

$$c = \tilde{k}^{\alpha} - (n+\delta) \ .\tilde{k}. \tag{50}$$

Réponse: En utilisant l'équilibre du marché des biens et services (20) pour isoler la consommation et en divisant pat L_t, on obtient:

$$\frac{C_t}{L_t} = \frac{Y_t}{L_t} - \frac{I_t}{L_t}, \tag{51}$$

$$c = \tilde{k}^{\alpha} - (n+\delta) \ .\tilde{k}. \tag{52}$$

où on utilise le fait qu'à long terme:, la production par travailleur est égale à:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha} - (n+\delta) \ .\tilde{k}. \tag{53}$$

16. Déterminez le stock de capital $\tilde{k}^{or}$ de la règle d'or permettant d'atteindre la consommation par travailleur (50) la plus élevée.

Réponse : Le stock de capital par travailleur de long terme permettant d'aboutir à la consommation c la plus élevée est obtenue en calculant $\frac{\partial c}{\partial \tilde{k}} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial k} &= \alpha \ .\tilde{k}^{\alpha-1} - (n+\delta) = 0, \\ \tilde{k}^{or} &= \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{54}$$

17. En utilisant l'expression du stock de capital de la règle d'or $\tilde{k}^{or}$ et l'expression du stock de capital par travailleur d'une économie décentralisée déterminé à la question 10), montrez que le taux de taxe, $\hat{\tau}$, permettant de garantir $\tilde{k}^{or} = \tilde{k}$ s'écrit:

$$\hat{\tau} = \frac{(1+\beta)\ .(1+n)}{\beta\,.(n+\delta)} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \tag{55}$$

Réponse : En égalisant (41) et (54), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\beta\,.[(1-\alpha)+\alpha\,.\tau]}{(1+\beta)\ .(1+n)} &= \frac{\alpha}{n+\delta}, \\ \hat{\tau} &= \frac{(1+\beta)\ .(1+n)}{\beta\,.(n+\delta)} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{56}$$