Université François-Rabelais
Droit - Economie - Sciences Sociales
Tours

Année universitaire :	2017-2018
Session :	première session du premier semestre
Année d'étude :	M1
	Sciences Economiques
Discipline :	***Economie Avancée***
	(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1.2)
Titulaire du cours :	M. Olivier CARDI

- **Nom :**
- **Prénom :**

- Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
- Entourez la bonne réponse avec un stylo rouge.
- Une bonne réponse donne 1 point, l'absence de réponse 0 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

1 Détermination de la position extérieure nette (3 points)

On considère une petite économie ouverte composée d'un consommateur représentatif. Ce consommateur qui vit deux périodes notées 1 et 2 détient une richesse financière $A_t = B_t$ à la période $t = 0,1,2$ composée d'avoirs nets étrangers B_t. Pour simplifier, on suppose que la position extérieure nette initiale du pays est nulle, c'est-à-dire $B_0 = 0$. On impose la condition suivante:

$$A_2 = B_2 = 0. \tag{1}$$

Le stock de richesse financière détenue par l'individu à la période 1 s'écrit donc:

$$A_1 = B_1. \tag{2}$$

Le taux d'intérêt mondial (exogène) est noté r.

L'agent représentatif consomme une quantité C_1 à la période 1 et une quantité C_2 à la période 2 aboutissant à un bien-être intertemporel décrit par:

$$\Lambda \equiv (C_1)^{1/2} + (C_2)^{1/2}. \tag{3}$$

Les revenus du ménage représentatif sont composés des intérêts du fait de la détention de richesse financière rémunérée au taux r plus la dotation Y_i à la période $i = 1{,}2$. Les contraintes budgétaires du ménage représentatif aux périodes 1 et 2 s'écrivent donc:

$$C_1 = Y_1 - A_1, \tag{4a}$$

$$C_2 = (1 + r)\ .A_1 + Y_2. \tag{4b}$$

On note Ω la somme actualisée des revenus:

$$\Omega = Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r}. \tag{5}$$

1. Ecrivez au préalable la contrainte budgétaire intertemporelle en utilisant (4a) et (4b). Résolvez le problème de maximisation intertemporelle en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle et l'utilité intertemporelle (3). Déterminez l'égalité entre le prix subjectif et le prix relatif de la consommation présente:
A) $\frac{C_2}{C_1} = 1 + r$, B) $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 = 1 + r$, C) $\frac{C_2}{C_1} = 2\ .\ (1 + r)$, D) $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2} = 1 + r$
2. Déterminez l'élasticité de substitution intertemporelle notée σ:
A) $\sigma = \frac{1}{2}$, B) $\sigma = 2$, C) $\sigma = 1$, D) $\sigma = 0$
3. Déterminez la consommation optimale à la période 1 en utilisant votre réponse à la question 1):
A) $C_1 = \frac{\Omega}{2}$, B) $C_1 = \frac{\Omega}{2+r}$, C) $C_1 = \frac{\Omega}{3}$, D) $C_1 = \frac{\Omega}{(2+r)^{1/2}}$
4. On note $g^\star$ la croissance économique mondiale et g la croissance économique de la petite économie ouverte. On suppose que $Y_1 = Y$ et $Y_2 = (1 + g)\ .Y$ avec

$$(1 + g) = (1 + g^\star)^2\,. \tag{6}$$

En utilisant votre réponse à la question précédente ainsi que (4a) et (6), déterminez l'expression de la position extérieure nette de la petite économie ouverte en % du PIB notée $b_1 = B_1/Y$:
A) $b_1 = \frac{(r+g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}$, B) $b_1 = \frac{(r-g^\star)^2}{(2+r)\ .(1+r)}$, C) $b_1 = (r - g^\star)\ .\frac{(r+g^\star)}{(2+r)\ .(1+r)}$, D) $b_1 = (r - g^\star)\ .\frac{(2+r+g^\star)}{(2+r)\ .(1+r)}$

2 Exercice: Imposition et transferts dans le modèle à générations imbriquées (17 points)

On considère une économie fermée où les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population L_t croît à un taux constant n:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1 + n)\,. \tag{7}$$

L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle Λ_t la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \beta \, . \ln\left(C_{t+1}^O\right), \tag{8}$$

où le paramètre $\beta = \frac{1}{1+\rho} > 0$ représente le facteur d'actualisation, avec ρ le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t. L'individu reçoit également des transferts de l'Etat d'un montant forfaitaire T_t. Les revenus sont dépensés en biens de consommation C_t^Y, le reste est épargné S_t.

Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt notés $r_{t+1}\ .S_t$ de son épargne S_t avec r_{t+1} le taux d'intérêt prévalant à la date $t+1$. L'épargne du ménage réprésentatif est composée de titres de créance sur le capital physique. L'individu âgé consacre intégralement son épargne et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires sont donc décrites par:

$$C_t^Y + S_t = W_t + T_t, \tag{9a}$$

$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})\ .S_t. \tag{9b}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital, K_t, et du travail, L_t, selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante:

$$Y_t = (K_t)^\alpha\ . (L_t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10}$$

On note W_t le taux de salaire et $R_t = r_t + \delta$ le coût du capital. Pour amener le capital au niveau optimal et amortir le capital, l'économie doit investir à chaque période un montant I_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta\ .K_t, \tag{11}$$

où δ est le taux de dépréciation du capital physique.

On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite. La production du bien final, Y_t, est vendue au prix P_t normalisé à 1. La production du bien final est destinée à la consommation des travailleurs et des retraités, c'est-à-dire $C_t = L_t\ .C_t^Y + L_{t-1}\ .C_t^O$, et à l'investissement I_t:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{12}$$

Enfin, pour financer le transfert T_t vers le ménage représentatif, l'Etat prélève un montant $\tau\ .Y_t$ du chiffre d'affaire de la firme représentative, permettant ainsi de maintenir l'équilibre budgétaire:

$$L_t\ .T_t = \tau\ .Y_t. \tag{13}$$

1. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle puis déterminez l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente en résolvant le programme de maximisation intertemporelle:
A) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = 1 + r_{t+1}$, B) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} .\frac{1}{\beta} = 1 + r_{t+1}$, C) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} .\frac{1}{1+\beta} = 1 + r_{t+1}$, D) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} .\beta = 1 + r_{t+1}$
2. En utilisant votre réponse à la question précédente, déterminez l'expression du montant optimal d'épargne S_t en fonction du salaire W_t:
A) $S_t = \frac{\beta}{1+\beta} . (W_t + T_t)$, B) $S_t = \frac{1}{1+\beta} . (W_t + T_t)$, C) $S_t = \frac{1}{1-\beta} . (W_t + T_t)$, D) $S_t = \beta . (W_t + T_t)$
3. On note $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ le capital par travailleur. En écrivant au préalable le profit de la firme et en résolvant le programme de maximisation de la firme, déterminez le salaire réel:
A) $W_t = (1-\tau) . (1-\alpha) . (k_t)^{\alpha-1}$, B) $W_t = (1-\tau) . (1-\alpha) . (k_t)^{\alpha}$, C) $W_t = \frac{(1-\alpha)}{(1-\tau)} . (k_t)^{\alpha}$, D) $W_t = (1-\tau) .\alpha . (k_t)^{1-\alpha}$
4. En utilisant votre réponse à la question précédente et en écrivant au préalable la production par travailleur, $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$, déterminez la part distributive du travail, notée α_L:
A) $\alpha_L = (1-\alpha)$, B) $\alpha_L = \alpha$, C) $\alpha_L = (1-\alpha)(1-\tau)$, D) $\alpha_L = \alpha(1-\tau)$
5. Déterminez l'expression du taux d'intérêt (réel) à la date t, r_t, à partir de la maximisation du profit:
A) $r_t = (1-\tau) .\alpha \ (k_t)^{1-\alpha} - \delta$, B) $r_t = (1-\tau) .\alpha \ (k_t)^{\alpha} - \delta$, C) $r_t = (1-\tau) .\alpha \ (k_t)^{\alpha-1} - \delta$, D) $r_t = \frac{\alpha}{1-\tau} \ (k_t)^{\alpha-1} - \delta$
6. Le théorème d'Euler et la propriété de rendements d'échelle constants implique l'égalité suivante:
A) $Y_t = R_t .K_t + W_t .L_t$, B) $Y_t = 1 - \frac{R_t .K_t + W_t .L_t}{\tau}$, C) $(1-\tau) .Y_t = R_t .K_t + W_t .L_t$, D) $Y_t = (1-\tau) . (R_t .K_t + W_t .L_t)$
7. En utilisant le fait que les retraités nés à la date $t-1$ ont accumulé une épargne totale constituée de capital physique, K_t et rémunérée au taux $1+r_t$, et en évaluant la consommation des travailleurs à la date t à l'aide de (9a), calculez la consommation totale, C_t. Puis en substituant C_t et I_t décrit par (11) dans (12), et en utilisant (13), déterminez l'équilibre sur le marché des capitaux:
A) $L_t .S_t = K_{t+1}$, B) $L_t . (S_t + T_t) = K_{t+1}$, C) $L_t .S_t . (1-\tau) = K_{t+1}$, D) $S_t = K_{t+1}$
8. En utilisant (10) et (13), exprimez les transferts par travailleur, T_t, en fonction du capital par travailleur, k_t:
A) $T_t = \tau .k_t^{1-\alpha}$, B) $T_t = \tau .k_t^{\alpha}$, C) $Y_t = \tau .\alpha .k_t^{\alpha}$, D) $Y_t = \tau . (1-\alpha) .k_t^{\alpha}$
9. En utilisant vos réponses aux questions 2) et 3), ainsi que votre réponse à la question précédente, montrez que l'épargne par travailleur s'écrit:
$$S_t = \frac{\beta}{1+\beta} . [(1-\alpha) + \alpha .\tau] . (k_t)^{\alpha} . \tag{14}$$
10. En utilisant l'équilibre sur le marché des capitaux déterminée à la question 7) et votre réponse à la question précédente, montrez que le capital par travailleur à long terme, $\tilde{k}$, est

décrit par:

$$\tilde{k} = \left\{ \frac{\beta \, . \left[(1-\alpha) + \alpha \, .\tau \right]}{(1+\beta) \ . (1+n)} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{15}$$

11. On note $\tilde{y}$ la production par travailleur à long terme. En utilisant la constance dans le temps de $\tilde{y}$, calculez la proportion dans laquelle le PIB réel croît à long terme, $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$:
A) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n$, B) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n + \delta$, C) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1-\tau)$, D) $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1 + n$
12. En utilisant (14), montrez que le taux d'épargne, $s = \frac{L_t \, .S_t}{Y_t}$ s'écrit:

$$s = \frac{\beta}{1+\beta} \, . \left[(1-\alpha) + \alpha \, .\tau \right]. \tag{16}$$

13. D'après (15), en utilisant (16), une hausse du taux d'imposition sur la valeur ajoutée, τ:
A) augmente la productivité marginale du capital et donc $\tilde{k}$, B) élève le salaire et donc $\tilde{k}$, C) diminue la productivité marginale du capital et réduit $\tilde{k}$, D) accroît l'épargne et donc $\tilde{k}$
14. En utilisant le fait qu'à long terme, $k_t = k_{t+1} = \tilde{k}$, montrez que l'investissement par travailleur s'écrit:

$$\frac{I_t}{L_t} = (n+\delta) \ .\tilde{k}. \tag{17}$$

15. En utilisant votre réponse à la question précédente et l'équilibre du marché des biens et services (12), en vous plaçant à long terme, montrez que la consommation par travailleur, $c = C_t / L_t$, s'écrit:

$$c = \tilde{k}^{\alpha} - (n+\delta) \ .\tilde{k}. \tag{18}$$

16. Déterminez le stock de capital $\tilde{k}^{or}$ de la règle d'or permettant d'atteindre la consommation par travailleur (18) la plus élevée.
17. En utilisant l'expression du stock de capital de la règle d'or $\tilde{k}^{or}$ et l'expression du stock de capital par travailleur d'une économie décentralisée déterminé à la question 10), montrez que le taux de taxe, $\hat{\tau}$, permettant de garantir $\tilde{k}^{or} = \tilde{k}$ s'écrit:

$$\hat{\tau} = \frac{(1+\beta) \ . (1+n)}{\beta \, . (n+\delta)} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \tag{19}$$