Université François-Rabelais
Droit - Economie - Sciences Sociales
Tours

Année universitaire :	2016-2017
Session :	première session du premier semestre
Année d'étude :	M1
	Sciences Economiques
Discipline :	***Economie Avancée***
	(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1.2)
Titulaire du cours :	M. Olivier CARDI

- Nom :
- Prénom :

- Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
- Entourez la bonne réponse avec un stylo rouge.
- Chaque bonne réponse dans les exercices (questions de cours) donne 1 (0.5) point, l'absence de réponse 0 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 (0.25) point.

1 Questions de Cours (3 points)

1. L'élasticité de substitution intertemporelle détermine le fait qu'un individu est prêteur ou emprunteur:
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Faux.
2. L'équivalence ricardienne implique qu'une hausse des impôts conduit à une baisse de l'épargne privée:
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Vrai.
3. Dans le modèle de générations imbriquées de Diamond-Samuelson, la part des revenus du capital dans le PIB augmente à mesure que l'économie accumule du capital physique et se rapproche de son équilibre de long terme:
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Faux.
4. D'après la règle d'or, lorsque la productivité marginale du capital physique nette de la dépréciation du capital physique est supérieure au taux de croissance de la population, le pays peut faire augmenter la consommation par habitant en élevant le stock de capital par travailleur:

A) Vrai, B) Faux

Réponse : Vrai.

5. En économie ouverte, un déficit de la balance courante pourra être financé par une vente de titres domestiques et/ou de devises étrangères:

   A) Vrai, B) Faux

   Réponse : Vrai.

6. D'après la condition de solvabilité intertemporelle en économie ouverte, un pays ayant une position extérieure nette négative devra enregistrer des surplus commerciaux dans le futur:

   A) Vrai, B) Faux

   Réponse : Vrai.

2 Exercice: Déterminants de la position extérieure nette dans le modèle à générations imbriquées (17 points)

On considère une économie ouverte composée d'un ménage représentatif et d'une firme représentative. On suppose que les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population L_t croît à un taux constant n:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)\,. \tag{1}$$

L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle Λ_t la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \beta \ln\left(C_{t+1}^O\right), \tag{2}$$

où le paramètre $\beta = \frac{1}{1+\rho} > 0$ représente le facteur d'actualisation, avec ρ le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t qui est dépensé en biens de consommation C_t^Y, le reste étant épargné S_t.

Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt notés $r^\star .S_t$ de son épargne S_t avec $r^\star$ le taux d'intérêt mondial qui est le taux auquel l'économie domestique prête ou emprunte sur le marché mondial des capitaux. L'épargne du ménage réprésentatif est composé de titres de créance sur le capital physique et d'actifs étrangers. Le stock de capital à la date t est noté K_t et le stock net d'actifs étrangers (ou position extérieure) est noté B_t. On suppose que l'économie est de petite dimension sur le marché mondial des capitaux de telle sorte que le taux d'intérêt mondial, $r^\star$, est exogène pour la petite économie. Par ailleurs, le taux d'intérêt mondial est supposé constant dans le temps. L'individu âgé consacre intégralement le principal et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires sont décrites par:

$$\begin{aligned} C_t^Y + S_t &= W_t, && (3a) \\ C_{t+1}^O &= (1+r^\star)\ .S_t. && (3b) \end{aligned}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital, K_t, et du travail, L_t, selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante:

$$Y_t = (K_t)^\alpha\ .\left(A_t\ .L_t\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

où A_t représente l'efficacité des travailleurs qui croît à un rythme constant égal à a:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + a. \tag{5}$$

On note W_t le taux de salaire et $R_t = R^\star = r^\star + \delta$ le coût du capital constant dans le temps. Pour amener le capital au niveau optimal et amortir le capital, l'économie doit investir à chaque période un montant I_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta\ .K_t, \tag{6}$$

où δ est le taux de dépréciation du capital physique.

On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite. La production du bien final, Y_t, est vendue au prix P_t à la fois sur le marché domestique et le marché mondial. Comme l'économie est de petite dimension, les firmes vendent le bien au prix fixé sur le marché mondial, $P^\star$, que l'on normalise à 1:

$$P_t = P^\star = 1. \tag{7}$$

La production du bien final est destinée à la consommation des travailleurs et des retraités, c'est-à-dire $C_t = L_t\ .C_t^Y + L_{t-1}\ .C_t^O$, à l'investissement I_t, ainsi qu'à l'exportation:

$$Y_t = C_t + I_t + TB_t. \tag{8}$$

La consommation $C_t = C_t^D + C_t^E$ est composée d'achats du bien domestique, C_t^D, et du bien étranger importé, C_t^E. Comme les biens domestiques et les biens importés sont des substituts parfaits, l'égalité (7) indique que le prix des biens importés, $P^\star$, est égal au prix des biens domestiques normalisé à 1. Le terme $TB_t = EX_t - C_t^E$ de l'équation (8) représente la balance commerciale égale aux exportations, EX_t, moins les importations de biens de consommation, C_t^E, produits par le reste du monde.

1. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle puis déterminez l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente en résolvant le programme de maximisation intertemporelle:
   A) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = (1+\beta)\ .(1+r^\star)$, B) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = \left(\frac{1+r^\star}{1+\beta}\right)$, C) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = (1+r^\star)$, D) $\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = \beta\ .(1+r^\star)$

Réponse : D). Pour déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut éliminer S_t des contraintes budgétaires. A cette fin, en utilisant (3b), on obtient: $S_t = \frac{C^O_{t+1}}{1+r^\star}$. Puis en substituant cette expression dans (3a), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$C^Y_t + \frac{C^O_{t+1}}{1+r^\star} = W_t. \tag{9}$$

On élimine la consommation future C^O_{t+1} de l'utilité intertemporelle (2) en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle (9), c'est-à-dire $C^O_{t+1} = (1+r^\star)\left(W_t - C^Y_t\right)$:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C^Y_t\right) + \beta \ln\left[(1+r^\star)\ .\left(W_t - C^Y_t\right)\right]. \tag{10}$$

En différentiant par rapport à C^Y_t et en annulant la dérivée partielle, on obtient l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporel et le prix relatif de la consommation présente:

$$\frac{C^O_{t+1}}{C^Y_t} = \beta\ .(1+r^\star) \tag{11}$$

2. En utilisant votre réponse à la question précédente, déterminez l'expression du montant optimal d'épargne S_t en fonction du salaire W_t:
   A) $S_t = \frac{1}{1+\beta}\ .W_t$, B) $S_t = \frac{\beta}{1+\beta}\ .W_t$, C) $S_t = \beta\ .W_t$, D) $S_t = \frac{1}{1-\beta}\ .W_t$
   Réponse : B). En éliminant C^O_{t+1} de la contrainte budgétaire intertemporelle (9) en utilisant la condition du premier order (11), on obtient la consommation optimale du travailleur en fonction du revenu disponible W_t:

$$C^Y_t = \frac{1}{1+\beta}\ .W_t, \tag{12}$$

   Pour déterminer l'épargne optimale, on substitue (12) dans la contrainte budgétaire (11):

$$S_t = \frac{\beta}{1+\beta}\ .W_t. \tag{13}$$

3. En écrivant au préalable le profit de la firme et en résolvant le programme de maximisation de la firme, déterminez l'expression du capital par travailleur efficace $k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$ en fonction de $R^\star$:
   A) $k_t = \left(\frac{\alpha}{R^\star}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, B) $k_t = (R^\star)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, C) $k_t = (\alpha\ .R^\star)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, D) $k_t = \left(\frac{\alpha}{R^\star}\right)^{\alpha-1}$
   Réponse : A). En utilisant (7), le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t\ .Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production:

$$\Pi_t \equiv (K_t)^\alpha\ .(A_t\ .L_t)^{1-\alpha} - W_t\ .L_t - R^\star\ .K_t. \tag{14}$$

   La firme choisit K_t en égalisant la productivité marginale du capital au coût du capital $R^\star$:

$$\begin{aligned} \alpha\ .(K_t)^{\alpha-1}\ .(A_t\ .L_t)^{1-\alpha} &= R^\star, \\ \alpha\ .\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} &= R^\star, \\ k_t = \left(\frac{\alpha}{R^\star}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{15}$$

4. On note $\tilde{k}$ le capital par travailleur efficace à l'état stationnaire (ou de long terme). Expliquez pourquoi le capital par travailleur efficace est constant dans le temps et atteint instantanément son niveau de long terme $k_t = \tilde{k}$.

   Réponse : Le capital par travailleur efficace est constant dans le temps puisque le coût du capital est exogène et constant dans le temps. Dans une économie fermée, le processus d'accumulation du capital est progressif car l'investissement augmente la production puis l'épargne permettant à nouveau d'augmenter le capital. Dans une économie ayant accès au marché mondial des capital, l'offre de capital est parfaitement élastique au taux d'intérêt ce qui signifie que les firmes peuvent obtenir les fonds nécessaires (pour un taux d'intérêt fixe égal à $r^{\star}$) pour installer le capital par travailleur efficace de long terme.

5. En utilisant (1), (5) et le fait que $k_{t+1} = k_t$, déterminez le stock de capital à la date K_{t+1}: A) $K_{t+1} = (1+n)\ .K_t$, B) $K_{t+1} = (1+a)\,K_t$, C) $K_{t+1} = (1+a)\ .(1+n)\ .K_t$, D) $K_{t+1} = \left(\frac{1+n}{1+a}\right)\ .K_t$

   Réponse : C). Comme $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}\ .L_{t+1}} = \frac{K_t}{A_t\ .L_t}$, en utilisant (1) et (5), on obtient:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= \frac{A_{t+1}}{A_t}\ .\frac{L_{t+1}}{L_t}\ .K_t, \\ &= (1+a)\ .(1+n)\ .K_t. \end{aligned} \tag{16}$$

6. Déterminez le salaire réel en utilisant les conditions du premier ordre du programme de maximisation de la firme:
   A) $W_t = (1-\alpha)\ .A_t\ .\left(\tilde{k}\right)^{\alpha}$, B) $W_t = (1-\alpha)\ .\left(\tilde{k}\right)^{\alpha}$, C) $W_t = (1-\alpha)\ .\left(\tilde{k}\right)^{1-\alpha}$, D) $W_t = (1-\alpha)\ .A_t\ .\left(\tilde{k}\right)^{1-\alpha}$

   Réponse : A). En différentiant (14) par rapport à L_t, on obtient l'égalité habituelle entre la productivité marginale du travail et le salaire réel:

$$\begin{aligned} W_t &= (1-\alpha)\ .A_t\ .(K_t)^{\alpha}\ .(A_t\ .L_t)^{-\alpha}, \\ &= (1-\alpha)\ .A_t\ .(k_t)^{\alpha}, \\ &= (1-\alpha)\ .A_t\ .\left(\tilde{k}\right)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{17}$$

7. A quel rythme croît le taux de salaire réel? (Aide : Calculez $\frac{W_{t+1}}{W_t}$):
   A) $\frac{W_{t+1}}{W_t} = 1$, B) $\frac{W_{t+1}}{W_t} = 1+n$, C) $\frac{W_{t+1}}{W_t} = 1+a$, D) $\frac{W_{t+1}}{W_t} = (1+a)\ .(1+n)$

   Réponse : C). Le rythme auquel croît le taux de salaire réel est obtenu en calculant le rapport:

$$\begin{aligned} \frac{W_{t+1}}{W_t} &= \frac{(1-\alpha)\ .A_{t+1}\ .\left(\tilde{k}\right)^{\alpha}}{(1-\alpha)\ .A_t\ .\left(\tilde{k}\right)^{\alpha}}, \\ &= \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+a. \end{aligned} \tag{18}$$

   Donc le taux de salaire croît au rythme égal à a.

8. En utilisant le fait les retraités nés à la date $t-1$ ont accumulé une épargne totale constituée de capital physique, K_t, et d'actifs étrangers, B_t, et rémunérée au taux $1+r^{\star}$, et en évaluant

la consommation des travailleurs à la date t à l'aide de (3a), calculez la consommation totale, C_t. Puis en substituant C_t et I_t décrit par (6) dans (8), montrez que:

$$S_t \, .L_t = (1 + r^\star) \, .B_t + K_{t+1} + TB_t. \tag{19}$$

Puis en utilisant la définition de la balance courante, montrez que:

$$S_t \, .L_t = B_{t+1} + K_{t+1}. \tag{20}$$

Réponse : En utilisant le fait les retraités nés à la date $t-1$ ont une accumulé une épargné égale $L_{t-1} \, .S_{t-1} = B_t + K_t$ rémunérée au taux $1 + r^\star$, la consommation des retraités à la date t est égal à $L_{t-1} \, .C_t^O = (1 + r^\star) \, .L_{t-1} S_t = (1 + r^\star) \, . (B_t + K_t)$. D'après (3a), la consommation des travailleurs à la date t est égale à $L_t \, .C_t^Y = L_t \, .W_t - L_t \, .S_t$. En substituation la consommation totale ainsi que l'investissement décrit par (6) dans (8), l'équilibre sur le marché des biens et services peut être réécrit

$$\begin{aligned} Y_t &= L_t \, .C_t^Y + L_{t-1} \, .C_t^O + I_t + TB_t, \\ Y_t &= (1 + r^\star) \, . (B_t + K_t) + L_t \, .W_t - L_t \, .S_t + K_{t+1} - K_t + \delta \, .K_t + TB_t, \\ L_t \, .S_t &= (1 + r^\star) \, .B_t + K_{t+1} + TB_t. \end{aligned} \tag{21}$$

où la troisième ligne est obtenue en appliquant le théorème d'Euleur à la fonction de production:

$$Y_t = R^\star \, .K_t + W_t \, .L_t. \tag{22}$$

En utilisant la définition de la balance courante:

$$B_{t+1} - B_t = r^\star B_t + TB_t, \tag{23}$$

pour réécrire (21), on obtient (20).

9. On note $b_{t+1} = \frac{B_{t+1}}{A_{t+1} \, .L_{t+1}}$ et $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \, .L_{t+1}}$ la position extérieure nette et le stock de capital par travailleur efficace. Exprimez la condition d'équilibre sur le marché des biens et services (20) en termes de travailleur efficace (Aide : diviser les membres de gauche et de droite de (20) par $A_t \, .L_t$).

   Réponse : En divisant (20) par $A_t \, .L_t$, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{L_t \, .S_t}{A_t \, .L_t} &= \left(\frac{B_{t+1} + K_{t+1}}{A_{t+1} \, .L_{t+1}} \right) . \left(\frac{A_{t+1} \, .L_{t+1}}{A_t \, .L_t} \right), \\ &= (b_{t+1} + k_{t+1}) \, . (1 + a) \, . (1 + n) \, . \end{aligned} \tag{24}$$

10. En combinant vos réponses aux questions 2) et 6), et en utilisant l'expression de la productivité marginale du capital par travailleur efficace déterminée à la question 3), montrez que l'épargne totale domestique par travailleur efficace s'écrit:

$$\frac{S_t \, .L_t}{A_t \, .L_t} = \frac{\beta}{1 + \beta} \cdot \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \, .R^\star \, .\tilde{k} \tag{25}$$

Réponse : En substituant l'expression du salaire (17) dans l'expression de l'épargne optimale (13) puis en utilisant le fait que $\alpha \,.\, \left(\tilde{k}\right)^{\alpha-1} = R^\star$, l'épargne totale domestique par travailleur efficace s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{S_t \,.L_t}{A_t \,.L_t} &= \frac{\beta}{1+\beta} \,.\frac{W_t \,.L_t}{A_t \,.L_t}, \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \,.\frac{A_t \,.(1-\alpha) \,.\left(\tilde{k}\right)^{\alpha} \,.L_t}{A_t \,.L_t}, \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \,.(1-\alpha) \,.\left(\tilde{k}\right)^{\alpha-1} \,.\tilde{k}, \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \,.R^\star \,.\tilde{k}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

11. En combinant vos réponses aux deux questions précédentes, montrez que la position extérieure de la petite économie ouverte s'écrit:

$$b_{t+1} = \left[\frac{\beta}{1+\beta} \,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \,.\frac{R^\star}{(1+a) \,.(1+n)} - 1\right] \,.\tilde{k}. \qquad (27)$$

Expliquez de manière analytique puis de manière économique la raison pour laquelle $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$.

Réponse : En isolant b_{t+1} puis en substituant (26) dans (24), on obtient:

$$\begin{aligned}
b_{t+1} &= \frac{S_t \,.L_t}{A_t \,.L_t} \,.\frac{1}{(1+a) \,.(1+n)} - k_{t+1}, \qquad (28) \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \,.\frac{R^\star \,.\tilde{k}}{(1+a) \,.(1+n)} - \tilde{k}, \\
&= \left[\frac{\beta}{1+\beta} \,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \,.\frac{R^\star}{(1+a) \,.(1+n)} - 1\right] \,.\tilde{k}, \qquad (29)
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$ d'après (15) pour obtenir la deuxième ligne. De manière analytique, comme la position extérieure nette par travailleur efficace ne dépend que de paramètres constants dans le temps ainsi que $\tilde{k}$, on en déduit que $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$. L'économie se situe instantanément à l'équilibre de long terme puisqu'e si l'épargne domestique est insuffisante pour atteindre le capital par travailleur efficace, $\tilde{k}$, elle peut emprunter le montant supplémentaire nécessaire sur le marché mondial des capitaux. Comme la position extérieure par travailleur efficace s'ajuste en fonction du niveau du capital par travailleur efficace, ce dernier étant constant, la position extérieure par travailleur efficace est également constante. Toutefois, la position extérieure nette B_t varie dans une économie qui croît comme on le montre à la question suivante.

12. Déterminez la relation entre B_{t+1} et la position extérieure initiale B_0 en utilisant le fait $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$ ainsi que (1) et (5). On note y_t la production par travailleur efficace. En utilisant le fait que $y_{t+1} = \frac{Y_{t+1}}{A_{t+1} \,.L_{t+1}} = y_t$, en déterminant une relation entre Y_{t+1} et Y_0, montrez que:

$$\frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{B_0}{Y_0}. \qquad (30)$$

Réponse : Comme $b_{t+1} = \frac{B_{t+1}}{A_{t+1} .L_{t+1}} = \frac{B_t}{A_t .L_t}$, en utilisant (1) et (5), on obtient:

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= \frac{A_{t+1}}{A_t} . \frac{L_{t+1}}{L_t} .B_t, \\ &= (1+a) \ . (1+n) \ .B_t, \\ &= [(1+a) \ . (1+n)]^2 \ .B_{t-1}, \\ &= [(1+a) \ . (1+n)]^{k+1} \ .B_{t-k}, \\ &= [(1+a) \ . (1+n)]^{t+1} \ .B_0. \end{aligned} \tag{31}$$

En appliquant la même logique à la production par travailleur efficace, on obtient:

$$Y_{t+1} = [(1+a) \ . (1+n)]^{t+1} \ .Y_0. \tag{32}$$

En combinant (31) et (32), on obtient que la position extérieure nette exprimée en pourcentage du PIB est constante dans le temps:

$$\frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{[(1+a) \ . (1+n)]^{t+1}}{[(1+a) \ . (1+n)]^{t+1}} . \frac{B_0}{Y_0} = \frac{B_0}{Y_0}. \tag{33}$$

13. Pour interpréter (27), il est nécessaire de déterminer au préalable le coût du capital domestique, $R_t = r_t + \delta$ en économie fermée. En supposant que l'économie n'emprunte ni ne prête sur le marché mondial des capitaux, en exprimant la condition d'équilibre sur le marché des capitaux par travailleurs efficace $\frac{L_t .S_t}{A_t .L_t} = \frac{K_{t+1}}{A_t .L_t}$ et en vous plaçant à l'équiilibre de long terme ($k_{t+1} = k_t = \tilde{k}^f$), montrez que le coût du capital domestique en économie fermée (donc $B_t = 0$ et $TB_t = 0$) s'écrit:

$$\tilde{R}^f = \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) . \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) . (1+a) \ . (1+n) \,, \tag{34}$$

où l'indice f indique la situation d'économie 'fermée' à l'entrée ou à la sortie de capitaux étrangers.

Réponse : En utilisant le fait que le choix d'épargne optimal est décrit par (13), $S_t = \frac{\beta}{1+\beta} .W_t$ où le taux de salaire est égal à $W_t = (1-\alpha) \ .A_t . \left(k_t^f\right)^{\alpha}$, la condition d'équilibre sur le marché des capitaux par travailleurs efficace s'écrit:

$$\frac{L_t .S_t}{A_t .L_t} = \frac{\beta}{1+\beta} . (1-\alpha) \ . (k_t)^{\alpha} \,, \tag{35}$$

Puisque le capital par travailleur efficace à la période suivante est égal à:

$$\begin{aligned} \frac{K_{t+1}}{A_t .L_t} &= \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} .L_{t+1}} . \frac{A_{t+1} .L_{t+1}}{A_t .L_t}, \\ &= k_{t+1} . (1+a) \ . (1+n) \,, \end{aligned} \tag{36}$$

en égalisant (35) à (36) en se plaçant à l'équilibre de long terme où $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}^f$, et en résolvant par rapport à $\tilde{k}^f$, on obtient:

$$\left(\tilde{k}^f\right)^{\alpha-1} = \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) . \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) . (1+a) \ . (1+n) \,. \tag{37}$$

En substituant (37) dans $R = \alpha\ .k^{\alpha-1}$,on obtient le coût du capital à long terme en économie fermée:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^f &= \alpha\,.\left(\tilde{k}^f\right)^{\alpha-1}, \\ &= \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right).\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).(1+a)\ .(1+n)\,. \end{aligned} \tag{38}$$

14. On note y la production par travailleur efficace. En exprimant au préalable la production par travailleur efficace en utilisant (4), montrez que la production par travailleur efficace est constante dans le temps. Montrez que le taux de croissance de l'économie, g, est égal à

$$g = a + n. \tag{39}$$

Réponse : En utilisant la propriété de rendements d'échelle constants selon laquelle pour $\lambda > 0$, on a:

$$\lambda\ .Y_t = (\lambda\ .K_t)^{\alpha}\ .(A_t\ .\lambda\ .L_t)^{1-\alpha}, \tag{40}$$

on obtient la production par travailleur efficace en posant $\lambda = \frac{1}{A_t\ .L_t}$:

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{A_t\ .L_t} &= \left(\frac{K_t}{A_t\ .L_t}\right)^{\alpha}.\left(\frac{A_t\ .L_t}{A_t\ .L_t}\right)^{1-\alpha}, \\ &= (k_t)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{41}$$

En substituant $k_t = \tilde{k}$ décrit par (15), on obtient la production par travailleur efficace:

$$y_t = (k_t)^{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{R^{\star}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \tilde{y}. \tag{42}$$

Comme le capital par travailleur efficace est constant, la production par travailleur efficace est également constante dans le temps. Comme $\frac{Y_t}{A_t\ .L_t} = \tilde{y}$, on a $Y_t = \tilde{y}\ .A_t\ .L_t$; cela signifie que le PIB réel, Y_t, croît au même rythme que la productivité, a, et le taux de croissance de la population, n:

$$d\ln Y_t = g = d\ln A_t + d\ln L_t = a + n. \tag{43}$$

15. En substituant (34), montrez que la position extérieure nette (27) s'écrit:

$$\tilde{b} = \left(\frac{R^{\star}}{\tilde{R}^f} - 1\right).\tilde{k}. \tag{44}$$

Montrez que la position extérieure nette en pourcentage du PIB s'écrit:

$$\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} = \left(\frac{1}{\tilde{R}^f} - \frac{1}{R^{\star}}\right).\alpha. \tag{45}$$

Réponse : Comme $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$, en substituant (38) et (15) dans (29), on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \left[\frac{R^{\star}}{\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right).\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).(1+a)\ .(1+n)} - 1\right].\tilde{k}, \\ &= \left(\frac{R^{\star}}{\tilde{R}^f} - 1\right).\tilde{k}. \end{aligned} \tag{46}$$

En divisant (46) par (41), puis en substituant le capital par travailleur efficace (15), on obtient la position extérieure nette en pourcentage du PIB:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} &= \left(\frac{R^{\star}}{\tilde{R}^{f}}-1\right).\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^{\alpha}},\\
&= \left(\frac{R^{\star}}{\tilde{R}^{f}}-1\right).\tilde{k}^{1-\alpha},\\
&= \left(\frac{R^{\star}}{\tilde{R}^{f}}-1\right).\frac{\alpha}{R^{\star}},\\
&= \left(\frac{1}{\tilde{R}^{f}}-\frac{1}{R^{\star}}\right).\alpha.
\end{aligned} \tag{47}$$

16. On note $\tilde{s}=\frac{S_t\,.L_t}{A_t\,.L_t}\,.\frac{1}{y_t}$, avec $y_t=\tilde{y}$, le taux d'épargne défini comme l'épargne nationale rapportée au PIB. En utilisant (25) et l'expression du capital par travailleur efficace, $\tilde{k}$, déterminée à la question 3), montrez que le taux d'épargne s'écrit de la façon suivante:

$$\tilde{s}=\frac{\beta}{1+\beta}\,.\,(1-\alpha)\,. \tag{48}$$

Réponse : En substituant (15) dans (26), et en utilisant le fait que $y=k^{\alpha}$, le taux d'épargne s'écrit:

$$\begin{aligned}
\tilde{s} &= \frac{S_t\,.L_t}{A_t\,.L_t}\,.\frac{1}{\tilde{y}},\\
&= \frac{\beta}{1+\beta}\,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right).R^{\star}\,.\tilde{k}^{1-\alpha},\\
&= \frac{\beta}{1+\beta}\,.\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right).R^{\star}\,.\frac{\alpha}{R^{\star}},\\
&= \frac{\beta}{1+\beta}\,.\,(1-\alpha)\,.
\end{aligned} \tag{49}$$

17. On note $\tilde{i}=\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}$ le taux d'investissement. En utilisant l'expression de $\tilde{k}$ déterminé à la question 3), montrez que le taux d'investissement s'écrit de la façon suivante:

$$\tilde{i}=\frac{\alpha}{R^{\star}}. \tag{50}$$

Réponse : En utilisant le fait que $y=k^{\alpha}$, et $\tilde{k}=\left(\frac{\alpha}{R^{\star}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ d'après (15), le taux d'investissement $\tilde{i}$ défini par $\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
\tilde{i} &= \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}},\\
&= \tilde{k}^{1-\alpha},\\
&= \frac{\alpha}{R^{\star}}.
\end{aligned} \tag{51}$$

18. Vérifiez que la position extérieure nette en pourcentage du PIB (27) peut s'écrire en fonction du taux d'épargne (48) et du taux d'investissement (50):

$$\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}}=\frac{\tilde{s}}{(1+a)\;.\,(1+n)}-\tilde{i}. \tag{52}$$

Réponse : En utilisant le fait que $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$ et en divisant les membres de gauche et de droite de (27) par $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} &= \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \frac{R^{\star}}{(1+a)\ .(1+n)} \cdot \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} - \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}, \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \frac{R^{\star}}{(1+a)\ .(1+n)} \cdot \frac{\alpha}{R^{\star}} - \frac{\alpha}{R^{\star}}, \\
&= \frac{\tilde{s}}{(1+a)\ .(1+n)} - \tilde{i}, \qquad (53)
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} = \tilde{k}^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{R^{\star}}\right)$ et nous avons substitué les expressions (48) et (50).

19. En exprimant la balance courante, $B_{t+1} - B_t = r^{\star}\ .B_t + TB_t$, par travailleur efficace, montrez que le solde commercial par travailleur efficace noté $tb_t = \frac{TB_t}{A_t\ .L_t}$, est constant au cours du temps, c'est-à-dire $tb_t = \tilde{tb}$; puis en exprimant la relation en pourcentage du PIB en divisant par $\tilde{y}$, et en utilisant le fait que $a\ .n \simeq 0$, montrez que le solde commercial en pourcentage du PIB est décrit par la relation suivante:

$$\frac{\tilde{tb}}{\tilde{y}} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} \cdot [(a+n) - r^{\star}] \, . \qquad (54)$$

Réponse : En divisant les membres de gauche et de droite de la balance courante, $B_{t+1} = (1+r^{\star})\ .B_t + TB_t$, par $A_t\ .L_t$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{B_{t+1}}{A_{t+1}\ .L_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1}\ .L_{t+1}}{A_t\ .L_t} &= (1+r^{\star})\ .\frac{B_t}{A_t\ .L_t} + \frac{TB_t}{A_t\ .L_t}, \\
b_{t+1}\ .(1+a)\ .(1+n) &= (1+r^{\star})\ .b_t + tb_t, \\
\tilde{b}\ .[(1+a)\ .(1+n) - (1+r^{\star})] &= tb_t = \tilde{tb}. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Comme la position extérieure nette par travailleur efficace est constante au cours du temps, $b_{t+1} = b_t = \tilde{b}$, et comme $r^{\star}$ est constant dans le temps, le solde commercial par travailleur efficace est constant dans le temps, c'est-à-dire $tb_t = \tilde{tb}$; puis en divisant (55) par $\tilde{y}$, et en utilisant $a\ .n \simeq 0$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{tb}}{\tilde{y}} &= \frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} \cdot \left[1 + a + n + \underbrace{a\ .n}_{\simeq 0} - 1 - r^{\star}\right], \\
&= \frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} \cdot [(a+n) - r^{\star}] \, . \qquad (56)
\end{aligned}$$

20. On pose $g = a + n = (1-\gamma)\ .r^{\star}$ avec $0 < \gamma < 1$. A l'aide de (54), montrez que le solde commercial en pourcentage du PIB s'écrit:

$$\frac{\tilde{tb}}{\tilde{y}} = -\gamma\ .r^{\star}\ .\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}}. \qquad (57)$$

Réponse : En posant $g = a + n = (1-\gamma)\ .r^{\star}$ dans (54), on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{tb}}{\tilde{y}} &= \frac{\tilde{b}}{\tilde{y}} \cdot [(1-\gamma)\ .r^{\star} - r^{\star}] \, , \\
&= -\gamma\ .r^{\star}\ .\frac{\tilde{b}}{\tilde{y}}. \qquad (58)
\end{aligned}$$

3 Questions à choix multiples

En vous appuyant sur les résultats obtenus dans l'exercice ci-dessus, répondez aux questions suivantes:

1. Une économie fermée avec un taux de préférence pour le présent important a un coût du capital, $\tilde{R}^f$, relativement plus élevé:

   A) Vrai, B) Faux.

   Réponse : Vrai. D'après la définition de β, on a $\frac{1+\beta}{\beta} = 2 + \rho$. Donc $\tilde{R}^f$ est croissant avec le taux de préférence pour le présent car l'épargne devient plus faible et pour un investissement donné, le taux d'intérêt à l'équilibre sera plus élevé.

2. Une économie fermée avec un taux de préférence pour le présent important aura plus de chance d'avoir une position extérieure nette, $\tilde{b}$, négative lorsqu'elle s'ouvre au marché mondial des capitaux:

   A) Vrai, B) Faux.

   Réponse : Vrai. Une économie avec un taux de préférence pour le présent plus élevé aura une épargne plus faible et donc aura plus de chance de s'endetter auprès du reste du monde lorsqu'elle s'ouvrira au marché mondial des capitaux.

3. D'après (45), un pays aura une position extérieure négative à condition que le taux d'intérêt mondial, $r^\star$, soit supérieur au taux d'intérêt en économie fermée, $\tilde{r}^f = \tilde{R}^f - \delta$:

   A) Vrai, B) Faux.

   Réponse : Faux. L'expression (45) montre qu'un pays aura une position extérieure nette négative à condition que $\tilde{R}^f < R^\star$. En utilisant le fait que $R^\star = r^\star + \delta$ et en posant $\tilde{R}^f = \tilde{r}^f + \delta$, l'inégalité est satisfaite à condition que le taux d'intérêt mondial soit inférieur au taux d'intérêt en économie fermée.

4. D'après les expressions du taux d'épargne (48) et du taux d'investissement (50), une baisse du taux d'intérêt mondial $r^\star$ élève le taux d'investissement et laisse inchangé le taux d'épargne:

   A) Vrai, B) Faux.

   Réponse : Vrai. D'après (42), le taux d'épargne reste inchangé. D'après (43), le taux d'investissement s'élève car le coût du capital diminue.

5. En vous appuyant sur (52), une baisse du taux d'intérêt mondial dimunue la position extérieure nette en pourcentage du PIB en diminuant le taux d'épargne:

   A) Vrai, B) Faux.

   Réponse : Faux. Une baisse du taux d'intérêt mondial augmente le taux d'investissement et laisse inchangé l'épargne et donc d'après (52), la position extérieure nette en pourcentage du PIB diminue sous l'effet de la hausse du taux d'investissement.

6. D'après (57), lorsque $R^\star < \tilde{R}^f$, l'économie devra enregistrer un solde commercial positif représentant une fraction γ des intérêts de la dette extérieure:

A) Vrai, B) Faux.

Réponse : Vrai. D'après (45), lorsque $R^{\star} < \tilde{R}^f$, le pays aura une position extérieure nette négative, c'est-à-dire $\tilde{b}/\tilde{y} < 0$. D'après (53), le pays devra alors enregistrer un solde commercial positif, $\tilde{tb}/\tilde{y} > 0$, permettant de payer une fraction γ des intérêts sur la dette extérieure.