Université François-Rabelais
Droit - Economie - Sciences Sociales
Tours

Année universitaire :	2015-2016
Session :	première session du premier semestre
Année d'étude :	M1
	Sciences Economiques
Discipline :	***Economie Avancée***
	(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1.2)
Titulaire du cours :	M. Olivier CARDI

1 Questions de Cours

1. Le prix subjectif de la consommation présente en termes de consommation future est mesuré par le taux marginal de substitution intertemporelle.
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Vrai.
2. D'après la théorie des déficits jumeaux, un déficit public plus important conduit à un déficit de la balance courante.
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Vrai.
3. D'après l'équivalence ricardienne, une baisse des impôts provoque une augmentation de la consommation des ménages.
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Faux.
4. Dans le modèle de générations imbriquées de Diamond-Samuelson, une augmentation du taux de préférence pour le présent permet d'élever la production par travailleur à long terme.
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Faux.
5. La règle d'or dans un modèle avec générations imbriquées établit que le taux de rendement du capital égal à la productivité marginale du capital nette du taux de dépréciation du capital doit coïncider avec le taux de croissance de la population.
   A) Vrai, B) Faux
   Réponse : Vrai.
6. En économie ouverte, l'excès d'épargne nationale par rapport à l'investissement domestique a pour contrepartie un déficit de la balance courante.

A) Vrai, B) Faux

Réponse : Faux.

7. Un déficit de la balance courante a pour contrepartie une entrée nette de capitaux étrangers dans le pays domestique.

   A) Vrai, B) Faux

   Réponse : Vrai.

8. Un pays dont la dette vis-à-vis du reste du monde augmente sans cesse mais à un rythme moins élevé que le taux d'intérêt payé sur la dette est dit solvable de manière intertemporelle.

   A) Vrai, B) Faux

   Réponse : Vrai.

2 Exercice: Générations imbriquées et règle d'or

L'économie est composée d'un ménage représentatif et d'une firme représentative. On suppose que les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population L_t croît à un taux constant n:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n). \tag{1}$$

L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle Λ_t la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\ln\left(C_{t+1}^O\right), \tag{2}$$

où le paramètre $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t qui est dépensé en biens de consommation C_t^Y, le reste étant épargné S_t. Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt de son épargne $r_{t+1}\,.S_t$ avec r_{t+1} le taux d'intérêt anticipé. L'individu âgé consacre intégralement le principal et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires sont décrites par:

$$C_t^Y + S_t = W_t, \tag{3a}$$

$$C_{t+1}^O = (1+r_{t+1})\,.S_t. \tag{3b}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital K_t et du travail L_t selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante:

$$Y_t = K_t^{\alpha}\,.L_t^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \tag{4}$$

On note W_t le taux de salaire et R_t^K le coût du capital. Pour amener le capital à son niveau souhaité et amortir le capital, l'économie doit investir à chaque période un montant I_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta \, .K_t, \tag{5}$$

où δ est le taux de dépréciation du capital physique.

On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise à 1, le bien final étant le numéraire. La production du bien final est destinée à la consommation des travailleurs et des retraités, c'est-à-dire, $C_t = L_t \, .C_t^Y + L_{t-1} \, .C_t^O$, et à l'investissement I_t:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{6}$$

1. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle puis déterminez l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente $1 + r_{t+1}$ en résolvant le programme de maximisation intertemporelle.

   Réponse : Pour déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut éliminer S_t des contraintes budgétaires. A cette fin, en utilisant (3b), on obtient: $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}$. Puis en substituant cette expression dans (3a), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t. \tag{7}$$

   On élimine la consommation future C_{t+1}^O de l'utilité intertemporelle (2) en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle (7), c'est-à-dire $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)$:

$$\Lambda_t \equiv \ln \left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \ln \left[(1 + r_{t+1}) \; . \left(W_t - C_t^Y\right)\right]. \tag{8}$$

   En différentiant par rapport à C_t^Y et en annulant la dérivée partielle, on obtient l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporel et le prix relatif de la consommation présente:

$$\frac{(1+\rho) \, C_{t+1}^O}{C_t^Y} = (1 + r_{t+1}) \tag{9}$$

2. En utilisant votre réponse à la question précédente et les contraintes budgétaires, déterminez l'expression du montant optimal d'épargne S_t en fonction du salaire W_t.

   Réponse : En éliminant C_{t+1}^O de la CB intertemporelle (7) en utilisant la condition du premier order (9), on obtient la consommation optimale du travailleur en fonction du revenu disponible W_t:

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} \, .W_t, \tag{10}$$

   Pour déterminer l'épargne optimale, on substitue (10) dans la contrainte budgétaire (3a):

$$S_t = \frac{1}{2+\rho} \, .W_t \tag{11}$$

3. Déterminez les expressions du salaire réel W_t et du taux d'intérêt r_t en fonction du capital par travailleur $k_t \equiv K_t/L_t$.

   Réponse : Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t\ .Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production (on pose $P = 1$ car le bien final est le numéraire):

$$\Pi_t \equiv F\left(K_t, L_t\right) - W_t\ .L_t - \left(r_t + \delta\right)\ .K_t. \tag{12}$$

   En différentiant $Y_t = K_t^\alpha\ .L_t^{1-\alpha}$ par rapport à K_t puis L_t, et en égalisant les productivités marginales du capital au coût du capital et du travail au salaire, on obtient:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha\ .\left(k_t\right)^{\alpha-1}, = R_t^K, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)\ .\left(k_t\right)^{\alpha} = W_t. \tag{13b}$$

4. En substituant l'expression de l'épargne optimale (obtenue à la question 2), dans la relation d'équilibre du marché des capitaux, $L_t\ .S_t = K_{t+1}$, puis en utilisant l'expression du salaire obtenue à la question précédente, montrez que le capital par travailleur de long terme, noté $\tilde{k}$, s'écrit:

$$\tilde{k} = \left[\frac{(1-\alpha)}{(2+\rho)\ .(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{14}$$

   Réponse : En utilisant (13b) pour éliminer le salaire W_t et en substituant l'expression de l'épargne optimale dans l'équilibre sur le marché des capitaux, on obtient:

$$\begin{aligned} S_t &= (1+n)\ .k_{t+1}, \\ \frac{W_t}{2+\rho} &= (1+n)\ .k_{t+1}, \\ \frac{(1-\alpha)\ .\left(k_t\right)^{\alpha}}{2+\rho} &= (1+n)\ .k_{t+1}. \end{aligned}$$

   En utilisant le fait qu'à long terme, le stock de capital par travailleur reste constant, $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$, on obtient:

$$\tilde{k} = \left[\frac{(1-\alpha)\ .\tilde{k}^{\alpha}}{(2+\rho)\ .(1+n)}\right].$$

   ce qui en résolvant conduit à (14).

5. En substituant au préalable l'expression de l'investissement (5) dans l'équilibre du marché des biens et services, en divisant l'expression par L_t, puis en évaluant l'expression lorsque l'économie est à long terme, $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$, montrez que la consommation par travailleur, $\tilde{c} = C_t/L_t$, s'écrit:

$$\tilde{c} = \tilde{k}^{\alpha} - (n+\delta)\ .\tilde{k}. \tag{15}$$

   Réponse: La consommation agrégée C_t est égale au PIB moins l'investissement:

$$\begin{aligned} C_t &= Y_t - I_t = Y_t - K_{t+1} + (1-\delta)\ .K_t, \\ \frac{C_t}{L_t} &= k_t^{\alpha} - (1+n)\ .k_{t+1} + (1-\delta)\ .k_t, \\ c &= k^{\alpha} - (n+\delta)\ .k. \end{aligned}$$

6. En déterminant au préalable le stock de capital k^{or} de la règle d'or permettant d'atteindre la consommation par travailleur (15) la plus élevée, montrez que $\tilde{k} \leq k^{or}$ à condition que l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\frac{(1-\alpha)}{(2+\rho)\ .(1+n)} \leq \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right). \tag{16}$$

Réponse : Le stock de capital par travailleur de long terme permettant d'aboutir à la consommation c la plus élevée est obtenue en calculant $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial k} &= \alpha\ .k^{\alpha-1} - (n+\delta) = 0, \\ k^{or} &= \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{17}$$

En comparant (17) avec (14), lLe stock de capital par travailleur de l'équilibre concurrentiel est plus faible ou égal à celui de la règle d'or à condition que:

$$\left[\frac{(1-\alpha)\ .}{(2+\rho)\ .(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

ce qui aboutit à l'inégalité (16).

3 Exercice : Endettement extérieur et erreur d'anticipation sur le niveau futur de la technologie

On considère une petite économie ouverte composée d'un consommateur représentatif et d'une firme représentative. Ce consommateur qui vit deux périodes notées 1 et 2 détient une richesse financière $A_t = B_t + K_{t+1}$ à la période $t = 0{,}1{,}2$ composée d'avoirs nets étrangers B_t et d'actifs domestiques portant sur le capital installé à la période suivante K_{t+1}. Pour simplifier, on suppose que la position extérieure nette initiale du pays est nulle, c'est-à-dire $B_0 = 0$. On impose la condition suivante:

$$A_2 = B_2 = 0. \tag{18}$$

Les stocks de richesse financière détenus par l'individu aux périodes 1 et 2 s'écrivent donc:

$$A_0 = K_1, \quad A_1 = B_1 + K_2. \tag{19}$$

Le taux d'intérêt mondial (exogène) est noté r.

L'agent représentatif consomme une quantité C_1 à la période 1 et une quantité C_2 à la période 2 aboutissant à un bien-être intertemporel décrit par:

$$\Lambda \equiv \ln C_1 + \ln C_2. \tag{20}$$

Les revenus du ménage représentatif sont composés des intérêts du fait de la détention de richesse financière rémunérée au taux r plus le profit de la firme représentative noté Π_t (avec $t = 1{,}2$)

car le ménage représentatif est propriétaire de la firme. Les contraintes budgétaires du ménage représentatif aux périodes 1 et 2 s'écrivent donc:

$$A_1 = (1+r)\ .A_0 + \Pi_1 - C_1, \tag{21a}$$

$$A_2 = (1+r)\ .A_1 + \Pi_2 - C_2 = 0, \tag{21b}$$

où $\Pi_1 = Y_1 - (1+r)\ .K_1$ avec Y_1 la quantité produite à la période 1 et $K_1 = A_0$ le stock de capital qui sont prédéterminés.

Le taux de dépréciation du capital physique δ est égal à 1. On suppose que la firme représentative investit un montant I_1 à la période 1 et installe le capital physique à la période 2:

$$K_2 = I_1. \tag{22}$$

A l'aide du capital physique K_2, la firme produit une quantité Y_2 à la période 2 selon la technologie de production:

$$Y_2 = Z_2^a\ .K_2^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

où Z_2^a est le niveau de technologie de la période 2 anticipé à la période 1. Le bien final est le numéraire de telle sorte que son prix de vente est normalisé à 1.

1. Ecrivez au préalable le profit de la firme à la période 2 noté Π_2. Déterminez l'investissement optimal de la firme $K_2^\star$. Montrez que le profit optimal de la firme à la période 2, $\Pi_2^\star$ est égal à:

$$\Pi_2^\star = \frac{(Z_2^a)^2}{4\ .(1+r)} \tag{24}$$

Réponse : Le profit de la firme à la période 2 est décrit par:

$$\Pi_2 = Y_2 - (1+r)\ .K_2 = Z_2^a\ .K_2^{\frac{1}{2}} - (1+r)\ .K_2. \tag{25}$$

L'investissement optimal est obtenu en différentiant le profit par rapport à K_2 et en annulant la dérivée première:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial K_2} = 0, \quad \frac{Z_2^a}{2}\ .K_2^{-\frac{1}{2}} - (1+r) = 0. \tag{26}$$

En résolvant par rapport à K_2, on obtient:

$$K_2^\star = \left[\frac{Z_2^a}{2\ .(1+r)}\right]^2. \tag{27}$$

En substituant l'investissement optimal (27) dans le profit (7), on obtient le profit optimal à la période 2:

$$\begin{aligned}
\Pi_2^\star &= Z_2^a\ .\left[\frac{Z_2^a}{2\ .(1+r)}\right] - (1+r)\ .\left[\frac{Z_2^a}{2\ .(1+r)}\right]^2, \\
&= \frac{(Z_2^a)^2}{2\ .(1+r)} - \frac{(Z_2^a)^2}{4\ .(1+r)}, \\
&= \frac{(Z_2^a)^2}{4\ .(1+r)}.
\end{aligned} \tag{28}$$

2. Ecrivez au préalable la contrainte budgétaire intertemporelle en utilisant (21a) et (21b) en notant Ω la valeur présente de la richesse:

$$\Omega = (1+r)\ .A_0 + \Pi_1 + \frac{\Pi_2}{1+r}. \tag{29}$$

Résolvez le problème de maximisation intertemporelle en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle et l'utilité intertemporelle (20). Exprimez les consommations optimales $C_1^\star$ et $C_2^\star$ en fonction de Ω. En utilisant (19), (24), montrez que la richesse en valeur présente (29) peut s'écrire:

$$\Omega = Y_1 + \left[\frac{Z_2^a}{2\,.\,(1+r)}\right]^2. \tag{30}$$

Réponse : Pour écrire la contrainte budgétaire intertemporelle, on élimine A_1 de la contrainte budgétaire (21a) en utilisant (21b), cad $A_1 = \frac{C_2-\Pi_2}{1+r}$, que l'on substitue dans (21a):

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} = (1+r_1)\,A_0 + \Pi_1 + \frac{\Pi_2}{1+r_2} \equiv \Omega. \tag{31}$$

Le programme de maximisation intertemporelle se réduit au choix de C_1 et éliminant C_2 de (20) en utilisant (31):

$$\max_{C_1} \ln C_1 + \ln\left[(1+r)\ .\,(\Omega - C_1)\right]. \tag{32}$$

En différentiant (32) par rapport à C_1 et en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité entre le prix subjectif de la consommation présente (TMS intertemporel) et le prix relatif de la consommation présente sur le marché:

$$\frac{C_2}{C_1} = 1+r. \tag{33}$$

En éliminant C_2 de (31) en utilisant (33), on obtient la consommation optimale à la période 1:

$$C_1 + C_1 = \Omega, \quad C_1^\star = \frac{\Omega}{2}. \tag{34}$$

En substituant (34) dans (33), on obtient la consommation optimale à la période 2:

$$C_2^\star = \frac{1+r}{2}\,.\Omega. \tag{35}$$

En utilisant le fait que $\Pi_1 = Y_1 - (1+r)\ .K_1$ et $A_0 = K_1$, la richesse en valeur présente peut être réécrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\Omega &= (1+r)\ .A_0 + \Pi_1 + \frac{\Pi_2}{1+r}, \\
&= (1+r)\ .K_1 + Y_1 - (1+r)\ .K_1 + \frac{\Pi_2}{1+r}, \\
&= Y_1 + \frac{(Z_2^a)^2}{4\,.\,(1+r)^2}, \\
&= Y_1 + \left[\frac{Z_2^a}{2\,.\,(1+r)}\right]^2.
\end{aligned} \tag{36}$$

3. Ecrivez au préalable l'équilibre sur le marché des biens et services à la période 1 en combinant (19) et (21a). En utilisant la consommation optimale $C_1^\star$ et (30), montrez que la position extérieure nette du pays domestique, B_1, est décrite par:

$$B_1^\star = \frac{1}{2}\left\{Y_1 - 3\,.\left[\frac{Z_2^a}{2\,.(1+r)}\right]^2\right\}. \tag{37}$$

Réponse : En combinant (19) et (21a), on obtient:

$$A_1 = B_1 + K_2 = Y_1 - C_1. \tag{38}$$

où on a utilisé le fait que $\Pi_1 = Y_1 - (1+r)\ .K_1$ et $A_0 = K_1$. La relation (38) correspond à l'équilibre sur le marché des biens et services. En combinant (30) et (34) et en substituant $C_1^\star$ et $K_2^\star$ donné par (27) dans (38), la position extérieure nette s'écrit:

$$\begin{aligned} B_1^\star &= Y_1 - K_2^\star - C_1^\star, \\ &= Y_1 - \left[\frac{Z_2^a}{2\,.(1+r)}\right]^2 - \frac{1}{2}\,.\left[Y_1 + \frac{Z_2^a}{2\,.(1+r)}\right]^2, \\ &= \frac{1}{2}\,.Y_1 - \frac{3}{2}\,.\left[\frac{Z_2^a}{2\,.(1+r)}\right]^2. \end{aligned} \tag{39}$$

4. En vous appuyant sur la relation (37), quel sera l'effet d'une hausse anticipée du niveau technologie Z_2^a sur la position extérieure optimale $B_1^\star$. Expliquez.

   Réponse : Une hausse anticipée du niveau technologie Z_2^a élève la productivité marginale du capital ce qui aboutit à un niveau d'investissement plus important d'après (27). Comme la richesse Ω en valeur présente (30) augmente, l'individu consomme plus à la période 1 comme le montre (34). Comme l'épargne domestique $Y_1 - C_1^\star$ baisse et l'investissement $K_2^\star$ augmente, la position extérieure $B_1^\star$ se dégrade.

5. On pose:

$$r = 0.10, \quad Z_2^a = 4.4, \quad Y_1 = 8. \tag{40}$$

Calculez la position extérieure nette du pays domestique $B_1^\star$ ainsi que la consommation optimale $C_2^\star$ à la période 2.

Réponse : En substituant les valeurs des paramètres dans (41), on obtient:

$$B_1^\star = \frac{1}{2}\,.8 - \frac{3}{2}\,.\left[\frac{4.4}{2\,.(1+0.1)}\right]^2 = 4 - \frac{3}{2}\,.2^2 = 4 - 6 = -2. \tag{41}$$

En combinant (35) et (36), la consommation optimale à la période 2 s'écrit:

$$C_2^\star = \frac{(1+r)}{2}\,.\left\{Y_1 + \left[\frac{Z_2^a}{2\,.(1+r)}\right]^2\right\}. \tag{42}$$

En substituant les valeurs des paramètres dans (42), on obtient:

$$C_2^\star = \frac{(1+0.1)}{2}\,.\left\{8 + \ .\left[\frac{4.4}{2\,.(1+0.1)}\right]^2\right\} = \frac{1.1}{2}\,.12 = 6.6. \tag{43}$$

6. Le pays domestique avait anticipé un niveau de technologie $Z_2^a = 4.4$ ce qui a conduit le pays à s'endetter auprès du reste du monde pour un montant égal à $B_1^\star$. Toutefois, lors de la période 2, le niveau de technologie est deux fois plus faible que celui anticipé, c'est-à-dire $Z_2 = 2.2$. Etant donné que le capital est déjà installé pour un montant $K_2^\star$ et le pays s'est déjà endetté au niveau $B_1^\star$, déterminez le niveau de la consommation C_2' satisfaisant la contrainte budgétaire (21b) en utilisant le fait que $Y_2 = Z_2 \,.\, (K_2^\star)^{\frac{1}{2}}$. Calculez la perte de bien-être intertemporel entraînée par l'erreur d'anticipation sur le niveau futur de la technologie. Concluez.

   Réponse : En utilisant le fait que $A_2 = B_1 + K_2$ et $\Pi_2 = Y_2 - (1+r)\ .K_2$, la contrainte bdugétaire (19) s'écrit:

$$C_2 = (1+r)\ .B_1 + Y_2. \tag{44}$$

   Comme le capital est déjà installé pour un montant K_2', la production à la période 2 est égale à:

$$\begin{aligned} Y_2 &= Z_2 \,.\, (K_2^\star)^{\frac{1}{2}} = Z_2 \,.\frac{Z_2^a}{2 \,.\, (1+r)}, \\ &= 2.2 \,.\frac{4.4}{2 \,.(1+0.1)} = 2.2 \,.2 = 4.4. \end{aligned} \tag{45}$$

   En substituant (45) dans (44), et en utilisant le fait que $B_1 = -2$ d'après (41), on obtient la consommation C_2':

$$C_2' = (1+r)\ .B_1^\star + Y_2 = -(1+0.1)\,.2 + 4.4 = 2.2. \tag{46}$$

   Le pays domestique a sur-évalué le niveau de technologie à la période 2 ce qui l'a conduit à investir fortement et à consommer de manière importante en s'endettant aurpsè du reste du monde. Lors de la période 2, le pays comprend son erreur mais le capital est déjà installé: la production à la période 2 est plus faible que celle anticipé. Comme le pays doit rembourser la dette extérieure avec les intérêts, il doit diviser sa consommation par trois (en comparant (43) et (46).

   Pour calculer la perte de bien-être intertemporel entraînée par l'erreur d'anticipation du niveau futur de la technologie, on calcule le bien-être noté $\Lambda^\star$ pour les consommations optimales et le bien-être Λ' après que le pays domestique ait pris connaissance de son erreur d'anticipation. En utilisant le fait que $\Omega = Y_1 + \frac{\Pi_2^\star}{1+r} = 8 + 2^2 = 12$, la consommation optimale $C_1^\star$ à la période 1 est égale à $C_1^\star = \frac{1}{2}\ .12 = 6$; en utilisant (43), le bien-être avant la prise de conscience de l'erreur d'anticipation est égal à:

$$\Lambda^\star = \ln C_1^\star + \ln C_2^\star = \ln 6 + \ln 6.6. \tag{47}$$

   Le bien-être après la prise de conscience de l'erreur d'anticipation est égal à:

$$\Lambda' = \ln C_1^\star + \ln C_2' = \ln 6 + \ln 2.2. \tag{48}$$

La perte de bien-être est donc égale à:

$$\Lambda' - \Lambda^\star = \ln C_2' - \ln C_2' = \ln\left(\frac{C_2'}{C_2^\star}\right),$$
$$= \ln\left(\frac{2.2}{6.6}\right) = \ln\frac{1}{3} \simeq -1.09. \tag{49}$$