2.2.14 L'interprétation du multiplicateur de Lagrange

Pour interpréter le multiplicateur de Lagrange, nous partons de la définition de λ donnée par (2.48) que nous réécrivons de la manière suivante :

$$\lambda \equiv \frac{\partial F/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial g} = \frac{\partial F}{\partial b}. \tag{2.50}$$

Pour obtenir la première égalité, nous avons utilisé le fait que les termes ∂x_2 au numérateur et au dénominateur s'annulaient. Pour obtenir la deuxième égalité, on utilise le fait que $\partial g/\partial x_i = \partial b/\partial x_i$. Ces transformations permettent de montrer que le multiplicateur de Lagrange mesure de combien s'accoît la fonction objectif F lorsque la contrainte budgétaire b est désserrée. Ce multiplicateur de Lagrange est appelé prix fictif et exprime la valeur d'un accroissement de b en termes d'utilité supplémentaire.

2.3 Le modèle à générations imbriquées de Diamond-Samuelson

Le modèle à générations imbriquées développé par Diamond (1965) qui s'appuyait sur le modèle originel de Samuelson (1958) est un outil permettant de prolonger le modèle de Solow en considérant le rôle d'agents hétérogènes à chaque date du temps (des travailleurs et des capitalistes), et permet d'évaluer l'effet de la mise en place d'un système de retraite, soit par capitalisation, soit par répartition.

2.3.1 Les ménages

On suppose que les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population croît à un taux constant n. L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle la plus élevée :

$$\Lambda_t^Y \equiv U\left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) U\left(C_{t+1}^O\right) \tag{2.51}$$

Les consommations C_t^Y et C_{t+1}^O sont les consommations de l'individu né à la date t : la notation Y indique que l'individu travaille et O indique que l'individu est âgé et ne travaille plus. La notation Λ^Y indique que c'est l'utilité intertemporelle de l'individu au moment où il rentre sur le marché du travail et est donc jeune.

Le paramètre $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent puisque nous avons montré qu'il coïncidait avec le taux d'actualisation subjectif. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t qui est dépensé en achats de biens de consommation C_t^Y, le reste étant épargné S_t. Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais détient une richesse financière S_t et reçoit les revenus d'intérêt de son épargne $r_{t+1}S_t$. L'individu âgé consacre intégralement le principal et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires des ménages s'écrivent donc de la façon suivante :

$$C_t^Y + S_t = W_t, \tag{2.52a}$$
$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) S_t. \tag{2.52b}$$

En éliminant S_t dans (2.52a) en utilisant (2.52b), on obtient la CBI de l'agent représentatif :

$$W_t = C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} \tag{2.53}$$

L'individu va donc choisir C_t^Y et C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle (2.51) la plus élevée tout en respectant sa contrainte budgétaire intertemporelle (2.53) selon laquelle, la valeur présente des dépenses de consommation doit être égale au revenu du travail à la période t. En substituant $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)$ dans (2.51) puis en différentiant et en annulant la dérivée première, on trouve que l'individu choisira un profil optimal de consommation de telle sorte que le taux marginal de substitution intertemporel $(1+\rho) \frac{U'\left(C_t^Y\right)}{U'\left(C_{t+1}^O\right)}$ est égal au prix relatif de la consommation lorsque l'individu est jeune, ce prix relatif étant mesuré par $1 + r_{t+1}$. Cette condition peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{C_{t+1}^O}{C_t^Y} = \left(\frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{\sigma_C}. \tag{2.54}$$

En différentiant totalement le système d'équations (2.53)-(2.54)

$$\begin{aligned}
d \ln C_{t+1}^O &= d \ln C_t^Y + \sigma_C \times d \ln (1 + r_{t+1}), \\
dC_t^Y &= dW_t - \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} \times d \ln C_{t+1}^O \\
&+ \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} \times d \ln (1 + r_{t+1}),
\end{aligned}$$

et en utilisant le théorème des fonctions implicites, on obtient les solutions de la consommation de l'individu lorsqu'il travaille puis lorsqu'il est retraité :

$$C_t^Y = C^Y (W_t, r_{t+1}), \quad C_{t+1}^O = C^O (W_t, r_{t+1}), \tag{2.55}$$

où

$$d \ln C_t^Y = d \ln W_t + \left(\frac{W_t - C_t^Y}{W_t}\right) \times (1 - \sigma_C) \, d \ln (1 + r_{t+1}).$$

Ces résultats montrent que :

- Une hausse du salaire W_t élève la consommation C_t^Y d'un montant indiqué par la PMC $\frac{C_t^Y}{W_t}$.
- Un accroissement du taux d'intérêt r_{t+1} de 1 point de pourcentage élève la consommation seulement si l'effet revenu l'emporte sur l'effet substitution, c'est-à-dire si et seulement si $\sigma_C < 1$.
- Un accroissement du salaire W_t ou une hausse du taux d'intérêt élève C_{t+1}^O (car l'ES et l'ER jouent dans le même sens).

On adopte la même procédure que pour déterminer l'éq. (2.24). En différentiant totalement (2.52a) $C_t^Y + S_t = W_t$, et en substituant la solution $C_t^Y = C^Y(W_t, r_{t+1})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
dS_t &= dW_t - dC_t^Y, \\
&= dW_t - \frac{C_t^Y}{W_t} \times dW_t \\
&- \frac{C_t^Y}{W_t}\left(W_t - C_t^Y\right) \times (1 - \sigma_C)\, d\ln r_{t+1}, \\
&= \frac{W_t - C_t^Y}{W_t} \times dW_t \\
&+ \frac{C_t^Y}{W_t} \times \left(W_t - C_t^Y\right) \times (\sigma_C - 1)\, d\ln(1 + r_{t+1}),
\end{aligned}$$

où $\left(W_t - C_t^Y\right) = S_t > 0$. Comme l'individu épargne puisqu'il n'a pas de revenu alternatif à la période $t+1$, une hausse du taux d'intérêt provoque un effet revenu positif.

En utilisant le théorème des fonctions implicites (selon lequel si les dérivées partielles de l'épargne par rapport au salaire et au taux d'intérêt existent, il existe une fonction implicite de l'épargne), on obtient la solution de l'épargne (voir également Appendice A.2) :

$$S_t = S(W_t, r_{t+1}). \tag{2.56}$$

La dérivée partielle $0 < S_W < 1$ indique qu'une hausse de salaire élève l'épargne mais moins que proportionnellement que W_t. De manière intuitive, lorsque l'individu devient plus riche, comme il consomme des biens normaux, l'individu élève du même coup sa consommation C_t^Y comme l'indique (2.52a) ce qui rend l'épargne moins sensible au salaire. Par ailleurs, comme l'indique (2.52b), pour élever sa consommation pendant la retraite, l'individu doit élever son épargne ce qui explique qu'il ne consomme pas la totalité de la hausse de son revenu. Par ailleurs, la réaction de l'épargne au taux d'intérêt est ambigue. La raison est qu'une hausse du taux d'intérêt élève le prix relatif de la consommation présente ce qui conduit l'individu à consommer moins dans le présent et plus dans le futur. Cet effet est d'autant plus grand que l'élasticité de substitution intertemporelle σ_C est élevée. Parallèlement, la hausse du taux d'intérêt rend également l'individu plus riche ce qui le conduit à consommer davantage lorsqu'il est plus jeune et donc à réduire son épargne. L'expression de la dérivée partielle indique que l'épargne augmente avec le taux d'intérêt à condition que l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure à 1, cad $\sigma_C > 1$. A noter que comme l'individu retraité ne reçoit aucune dotation, l'effet richesse intertemporelle ne joue pas de telle sorte que l'épargne reste fixe lorsque $\sigma_C = 1$.

2.3.2 Les firmes

Les retraités à la date t ont été des travailleurs jeunes à la date $t-1$. Entre $t-1$ et t, ils ont accumulé une richesse financière prenant la forme de titres de créance portant sur le capital physique. La détention des titres de créance par les retraités impliquent qu'ils sont propriétaires du capital physique qu'ils louent aux travailleurs jeunes qui sont propriétaires des entreprises. Dans la réalité, les banques s'interposent entre les deux types d'agents : les travailleurs jeunes déposent leur épargne à la banque. Une fois retraités, les individus prêtent des fonds équivalents à K_t aux travailleurs jeunes et en contrepartie, les retraités obtiennent une rémunération $R_t \times K_t$ et à la fin de la période, on leur rembourse la totalité du capital net de la dépréciation, $(1-\delta) \times K_t$.

On considère une firme de location de capital dont le propriétaire est le retraité. Cette firme doit choisir le stock de capital K_{t+1} qu'elle loue à la date $t+1$ au prix R_{t+1} ; une fraction δ du capital est dépréciée de telle sorte qu'à la date t, l'entreprise de location ne récupèrera que le montant $(1-\delta) K_{t+1}$. En actualisant le rendement du capital à la date t plus le remboursement du principal, le profit de l'entreprise de location s'écrit :

$$\Pi_t^L \equiv -K_{t+1} + \frac{R_{t+1}K_{t+1} + (1-\delta) K_{t+1}}{1+r_{t+1}}. \tag{2.57}$$

L'entreprise de location choisira d'acheter une quantité de capital de façon à obtenir le profit Π^L le plus élevé possible :

$$\frac{\partial \Pi_t^L}{\partial K_{t+1}} = -1 + \frac{R_{t+1} + (1-\delta)}{1+r_{t+1}} = 0. \tag{2.58}$$

De cette demande de capital de la part de l'entreprise de location, on trouve que le taux d'intérêt est égal à $r_{t+1} = R_{t+1} - \delta$. En d'autres termes, les propriétaires de l'entreprise de location de capital exigent un taux de rendement du capital R_{t+1} en contrepartie de la location de chaque unité de capital.

Les firmes en concurrence parfaite produisent une quantité Y_t en louant du capital K_t aux individus âgés et en louant les services de travail L_t fournis par les individus jeunes. La relation entre la quantité produite et les quantités de facteurs de production utilisées est décrite par une fonction de production qui est supposée homogène de degré égal à l'unité :

$$Y_t = F(K_t, L_t). \tag{2.59}$$

Les firmes paient les services de capital au taux $R_t \equiv r_t + \delta$ par unité de capital et les services de travail au taux W_t. Les firmes choisissent K_t et L_t de façon à obtenir le profit $\Pi_t \equiv P_t Y_t - W_t L_t - R_t K_t$ le plus élevé possible. Comme il y a un seul bien, on normalise son prix à 1, cad $P_t = 1$. Donc toutes les variables sont déflatées par l'indice de prix de la valeur ajoutée P_t. Les firmes élèvent les quantités K_t et L_t jusqu'à ce que la productivité marginale (décroissante) soit égale au coût du bien :

$$F_L(K_t, L_t) = W_t, \tag{2.60a}$$

$$F_K(K_t, L_t) = R_t = r_t + \delta, \tag{2.60b}$$

où δ est le taux de dépréciation du capital physique. En invoquant le **Théorème d'Euler** ainsi que la propriété de rendements d'échelle constants, on obtient que la production est intégralement consacrée à la rémunération des facteurs de production en présence de concurrence parfaite :

$$Y_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} L_t = R_t K_t + W_t L_t. \tag{2.61}$$

Comme nous sommes en équilibre général, les prix des facteurs de production sont déterminés de manière endogène. Le taux de salaire est déterminé par la rencontre entre l'offre et la demande. En raison de l'existence de rendements décroissants par rapport au travail, la demande de travail est représentée par une courbe décroissante : elle représente le prix maximum que les firmes sont prêtes à payer pour embaucher un travailleur supplémentaire. L'offre de travail est représentée par une droite verticale qui se déplace au cours du temps d'un montant $1+n$.

La demande de travail se déplace également sous l'impact de l'accroissement du capital qui élève la productivité des travailleurs. Comme l'offre est fixe et croît au taux exogène n, le taux de salaire est déterminé par $F_L\left[K_t, L_0\left(1+n\right)^t\right] = W_t$. En d'autres termes, le salaire réel d'équilibre W_t est une fonction croissante du stock de capital, c'est-à-dire :

$$W_t = W\left(K_t\right), \quad \frac{\partial W_t}{\partial K_t} > 0.$$

Concernant le taux d'intérêt, il est déterminé sur le marché des capitaux. Il faut se souvenir que ce sont les individus âgés qui détiennent le capital qu'ils louent aux entreprises. En contrepartie, ils obtiennent une rémunération équivalente au coût d'opportunité du capital, R_t, c'est-à-dire le montant qu'ils obtiendraient en plaçant leurs fonds sur un compte épargne sans risque. Comme le montre l'éq. (2.60b), le stock de capital à la date t implique une rémunération équivalente à $R_t = r_t + \delta$: elle représente la rémunération du capital détenu par les retraités à la date t, ces retraités étant nés à la date $t-1$ et ayant travaillé et épargné entre $t-1$ et t. Toutefois, la fonction d'épargne (2.56) montre que le choix d'épargner des travailleurs jeunes se base sur leur anticipations du taux d'intérêt r_{t+1} qu'ils obtiendront à la période suivante une fois qu'ils sont retraités. Ce taux d'intérêt est déterminé par la demande de capital et par l'offre de capital. La demande de capital est le fait des entreprises :

$$F_K\left(K_{t+1}^D, L_{t+1}\right) = R_{t+1} = r_{t+1} + \delta. \tag{2.62}$$

L'offre de capital à la date $t+1$ est le fait des travailleurs jeunes à la date t qui décident de l'allocation de leur salaire entre consommation présente et épargne à la période t en fonction du taux d'intérêt r_{t+1}. Ce taux d'intérêt sur lequel les travailleurs jeunes fondent leurs choix intertemporels est anticipé et déterminé par l'offre et la demande. Une fois âgés à la date $t+1$, les retraités (qui étaient des travailleurs jeunes à la date t) offrent une quantité K_{t+1}^S de capital.

En substituant $W_t = W\left(K_t\right)$ dans la fonction d'épargne (2.56), l'offre de capital S_t est donc fonction du capital d'aujourd'hui et du taux d'intérêt attendu à la période suivante :

$$S_t = S\left[W\left(K_t\right), r_{t+1}\right].$$

En supposant que l'ES l'emporte sur l'ER, c'est-à-dire $\sigma_C > 1$, l'offre de capital $L_t S_t = K_{t+1}^S$, est une fonction croissante du taux d'intérêt. A l'équilibre sur le marché des capitaux, $K_{t+1}^D = K_{t+1}^S = K_{t+1}$. En combinant les résultats obtenus sur le marché du travail et sur le marché des capitaux, l'épargne S_t est donc fonction du capital d'aujourd'hui et du capital de demain K_{t+1} :

$$S_t = S\left[W\left(K_t\right), r\left(K_{t+1}\right)\right].$$

Comme l'épargne dépend du capital à la date t et à la date $t+1$, l'équation ci-dessus est une équation d'accumulation du capital dont nous devons déterminer la stabilité, c'est-à-dire les conditions sous lesquelles l'économie converge vers le stock de capital de long terme.

Comme l'offre de travail croît à un taux constant et exogène alors que le capital est accumulé de manière endogène, pour s'intéresser à la variation du stock de capital au cours du temps, il convient d'exprimer les variables par travailleur. A cette fin, on utilise le fait que les productivités marginales sont homogènes de degré 0 : lorsque les facteurs de production sont multipliées par un facteur λ, la productivité marginale est inchangée :

$$F'\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = F'\left(K_t, L_t\right).$$

En posant $\lambda = 1/L_t$, on obtient pour la productivité marginale du capital :

$$F_K\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F_K\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = f'(k_t) = R_t.$$

En divisant les membres de gauche et de droite par Y_t de (2.61), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{L_t} &= y_t = R_t k_t + W_t, \\ W_t &= y_t - k_t \times f'(k_t). \end{aligned}$$

En résumé, la production par travailleur, la demande de travail et la demande de capital sont décrites par les relations suivantes :

$$y_t = f(k_t), \tag{2.63a}$$

$$W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t), \tag{2.63b}$$

$$R_{t+1} = f'(k_{t+1}), \tag{2.63c}$$

où (2.63b) a été déterminé en utilisant le fait que $Y = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) L = f(k) L$ et $\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - \frac{K}{L^2} f'(k) L = f(k) - kf'(k)$.

Jusqu'à maintenant, nous avons montré comment étaient déterminés le salaire W_t et le taux d'intérêt r_{t+1} à chaque date du temps. Il s'agit maintenant de déterminer la dyamique de l'économie qui est tirée par l'accumulation de capital au cours du temps. Il nous faut donc obtenir l'équation d'accumulation du capital par travailleur qui comme dans le modèle de Solow est obtenue en utilisant l'équilibre sur le marché des capitaux. Est-ce que cet équilibre sur le marché des capitaux permet d'assurer que la production est suffisante pour satisfaire la demande ? Nous allons montrer que l'équilibre sur le marché des biens services a pour corollaire l'équilibre sur le marché des capitaux.

2.3.3 L'équilibre sur le marché des biens et services

Comme nous sommes en équilibre général, nous devons considérer l'équilibre sur le marché des biens et services selon lequel l'offre et égale à la demande,

$$Y_t = C_t + I_t = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t, \tag{2.64}$$

où on utilise le fait que l'investissement brut I_t (FBCF) est égal à l'investissement net qui correspond à l'accumulation de capital nécessaire pour amener le capital à son niveau optimal plus l'investissement nécessaire pour remplacer les machines obsolètes (dépréciation du capital), cad

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t. \tag{2.65}$$

La dépense finale en biens de consommation C_t à la date t est constituée des dépenses en biens de consommation des individus âgés à la date t (et nés en $t-1$) $L_{t-1}C_t^O$ et des dépenses en biens de consommation des individus jeunes à la date t (et nés en t) $L_t C_t^Y$.

L'équilibre sur le marché des biens et services a pour contrepartie l'équilibre sur le marché des capitaux qui implique l'égalité entre l'offre de capitaux $L_t S_t$ et la demande de capitaux K_{t+1}. Pour le montrer, il est nécessaire de réécrire (2.64) en utilisant les revenus des individus âgés et jeunes. Le revenu des individus âgés est constitué de la rémunération du fait de la détention de capital ainsi que du capital lui même nette de la dépréciation :

$$L_{t-1}C_t^O = R_t K_t + (1-\delta) K_t. \tag{2.66}$$

D'après la contrainte budgétaire des individus jeunes (2.52a), les dépenses totales de consommation des travailleurs sont égales à la portion des revenus du travail qui n'est pas épargnée, cad $L_t C_t^Y = W_t L_t - S_t L_t$. En substituant les deux nouvelles contraintes budgétaires dans (2.64) et le fait que la production est égale à la rémunération des facteurs (2.61), on obtient que l'offre de capitaux est égale à la demande de capitaux :

$$L_t S_t = (1-\delta) K_t + I_t = K_{t+1}. \tag{2.67}$$

D'après cette expression, l'épargne des travailleurs constitue le capital futur qui est demandé par les firmes pour produire, ce capital étant détenu par les individus âgés. Pour mieux comprendre, retranchons $(1-\delta) K_t$ des deux côtés, on obtient : $L_t S_t - (1-\delta) K_t = I_t$. Le terme de gauche représente l'épargne nette : c'est l'épargne des jeunes moins la désépargne des retraités (qui 'mangent' le capital). Le terme de droite représente l'investissement brut, cad l'accumulation de capital permettant d'amener le capital au niveau optimal à long terme tout en remplaçcant le capital déprécié. Pour accumuler du capital $K_{t+1} - K_t > 0$ tout en remplaçant le capital obsolète, il faut que l'épargne des jeunes $L_t S_t$ soit supérieure à la désépargne des retraités $-(1-\delta) K_t$.

En utilisant le fait que la population croît à un taux exogène constant n :

$$L_{t+1} = L_t (1+n), \tag{2.68}$$

l'épargne des travailleurs peut être exprimée en fonction du capital de demain par travailleur k_{t+1} :

$$S_t = S(W_t, r_{t+1}) = \frac{L_{t+1}}{L_t} k_{t+1} = (1+n) k_{t+1}. \tag{2.69}$$

L'équation (2.69) est une équation dynamique du capital car elle met en relation le capital par travailleur (futur) en $t+1$, k_{t+1}, avec le capital par travailleur courant en t, k_t. Il est donc nécessaire d'analyser la stabilité de la dynamique du capital.

2.3.4 Stabilité de la dynamique de l'économie

La seule variable d'accumulation est le stock de capital par travailleur donc la dynamique de l'économie est tirée par cette accumulation, comme dans le modèle de croissance exogène. Dans le modèle de croissance de Solow, la stabilité de la dynamique s'explique par les rendements décroissants dans l'accumulation du capital qui impliquent que l'épargne augmente moins vite que le capital lui-même. Toutefois, ici, l'épargne est endogène. Pour décrire la dynamique de l'économie, il faut déterminer une relation entre k_{t+1} et k_t qui correspondra à une équation d'accumulation.

2.3.4.1 L'analyse de l'équation dynamique non linéaire

On procède de la façon suivante. Comme l'épargne dépend du taux de salaire et du taux d'intérêt, $S(W_t, r_{t+1})$, qui sont deux variables endogènes qui dépendent du capital par travailleur d'aujourd'hui k_t et de demain k_{t+1} car le taux d'intérêt est anticipé, on substitue les demandes de travail et de capital pour déterminer une relation entre k_{t+1} et k_t :

$$(1+n)\,k_{t+1} = S\left[f\left(k_t\right) - k_t f'\left(k_t\right), f'\left(k_{t+1}\right) - \delta\right]. \tag{2.70}$$

où on a substitué les relations (2.63b) et (2.63c) avec $r_{t+1} = R_{t+1} - \delta$. Pour analyser la stabilité du modèle, il faut évaluer comme varie le capital par travailleur futur k_{t+1} à la suite de chaque variation du capital d'aujourd'hui k_t. Si le capital augmente plus vite dans le futur à mesure que celui d'ajourd'hui s'élève, alors l'économie connaît une croissance sans limite de son stock de capital ce qui exige une épargne toujours plus grande et donc une consommation toujours plus faible. Pour analyser si cette situation émerge, il est nécessaire de différentier l'éq. (2.70) de manière totale :

$$(1+n)\,dk_{t+1} = -S_W k_t f'' dk_t + S_r f'' dk_{t+1}.$$

En isolant dk_{t+1} et en divisant les membres de gauche et de droite par dk_t, on obtient une mesure de comment varie k_{t+1} à chaque augmentation de k_t :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-S_W k_t f''}{(1+n) - S_r f''}, \tag{2.71}$$

où $f'' < 0$ en raison de l'existence de rendements décroissants dans l'accumulation du capital, $0 < S_W < 1$ et $S_r \gtreqless 0$. Pour que la dynamique de l'économie ne soit pas explosive mais au contraire stable, les ajustements du capital doivent être de plus en plus petits au cours du temps. En d'autres termes, la variation du capital par travailleur futur doit être moins importante que la variation du capital d'aujourd'hui ; donc la stabilité de la dynamique de l'économie nécessite que le rapport (2.71) soit inférieur à 1 ; et comme la variation peut être négative, la condition de stabilité doit être écrite en valeur absolue :

$$\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1. \tag{2.72}$$

De façon à pouvoir déterminer une condition de stabilité, on a souvent recours à la spécification de formes particulières pour l'utilité et la fonction de production. Nous allons supposer que l'utilité prend une forme logarithmique et que la fonction de production prend une forme Cobb-Douglas :

$$U\left(C^j\right) = \ln C^j, \quad y = f\left(k\right)^{1-\epsilon_L}, \tag{2.73}$$

où ϵ_L est la part distributive du travail égale à la part de la production qui n'est pas consacrée au paiement du capital. En procédant de la même façon que dans la section 2.2, cad en substituant la condition du premier ordre $C^O_{t+1} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C^Y_t$ (qui est une réécrite de (2.54)) dans la contrainte budgétaire (2.53), on obtient que la consommation des jeunes est décrite par $C^Y_t = \frac{1+\rho}{2+\rho} \times W_t$ puis en substituant cette relation dans la contrainte budgétaire (2.52a), on obtient que l'épargne est donnée par la relation suivante :

$$S_t = \frac{1}{2+\rho} W_t, \quad \text{avec} \quad W_t = \epsilon_L k_t^{1-\epsilon_L}, \tag{2.74}$$

où on utilise le fait que $W_t = y_t - f' \times k_t$ avec $y_t = k_t^{1-\epsilon_L}$, $f' = (1-\epsilon_L) \times k_t^{-\epsilon_L}$ et donc $f' \times k_t = (1-\epsilon_L)\, k_t^{1-\epsilon_L} = (1-\epsilon_L)\, y_t$ ce qui implique que $W_t = \epsilon_L y_t$.

En substituant la fonction d'épargne (2.74) dans (2.70), on obtient une équation d'accumulation du capital plus simple à analyser :

$$k_{t+1} = \frac{S_t}{1+n} = \left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right] k_t^{1-\epsilon_L} \equiv g\left(k_t\right). \tag{2.75}$$

En différentiant totalement cette relation et en évaluant la dérivée à l'état stationnaire, on obtient :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}|_{k=\tilde{k}} = \left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right](1-\epsilon_L)\left(\tilde{k}\right)^{-\epsilon_L},$$

où le capital par travailleur à l'état-stationnaire est obtenu en posant $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$ dans (2.76) ce qui aboutit

$$\tilde{k} = \left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{\epsilon_L}}. \tag{2.76}$$

En substituant l'expression du capital par travailleur prévalant à long terme décrit pas (2.76), on obtient que la stabilité du système est décrit par

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right]\left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{-1}(1-\epsilon_L) = (1-\epsilon_L) < 1. \tag{2.77}$$

La mesure (2.77) du rapport de la variation du capital futur à la variation du capital d'aujourd'hui indique que ce ratio est égale à la part distributive du capital $0 < 1-\epsilon_L < 1$ qui est inférieure à 1. Donc la dynamique de l'économie est bien stable ce qui signifie que l'économie converge vers le capital par travailleur de long terme $\tilde{k}$.

De manière intuitive, c'est le salaire dont une part $\frac{1}{1+\rho}$ est épargnée qui permet de financer le capital futur. La condition (2.77) implique qu'à mesure que l'économie accumule du capital, le salaire et donc l'épargne augmentent de moins en moins ce qui fait ralentir l'accumulation de capital au point que le capital par travailleur reste constant. Comme le montre la deuxième égalité de (2.74), la part distributive du capital $1-\epsilon_L$ détermine de combien augmente le salaire (et donc l'épargne) lorsque le capital augmente. L'idée sous-jacente est que le salaire s'accroît car les travailleurs deviennent plus productifs en étant dotés avec plus de capital : plus le capital est important, plus le travail est rare, et plus le salaire sear élevé. Mais comme le salaire augmente moins vite que le capital, l'épargne des jeunes L_tS_t ne sera plus suffisante pour compenser la désépargne des retraités K_t et l'accumulation du capital cessera.

Comme dans le modèle de Solow, il existe à long terme un investissement qui permet de renouveler le capital obsolète de doter les nouveaux travailleurs en capital. Pour le voir, à long terme, $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_t$; donc $K_{t+1} = L_{t+1}k_t = \frac{L_{t+1}}{L_t}K_t = (1+n)K_t$. En substituant cette expression dans $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = (n+\delta)K_t$ à long terme. Cet investissement de long terme correspond à l'épargne nette :

$$\begin{aligned} & L_t\, .S_t - (1-\delta)\ .K_t = K_{t+1} - (1-\delta)\ .K_t, \\ = \quad & L_t\, .S_t - (1-\delta)\ .K_t = (1+n)\ .K_t - (1-\delta)\ .K_t, \\ = \quad & L_t\, .S_t - (1-\delta)\ .K_t = (n+\delta)K_t. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Sur la Figure 2.13 est tracée la courbe représentative de $g(k_t)$ de l'équation d'accumulation du capital décrite par (2.76) en portant sur l'axe horizontal k_t et sur l'axe vertical k_{t+1}. La bissectrice indique le lieu des points où $k_{t+1} = k_t$. Comme le capital cesse de se modifier, il se situe à sa valeur de long terme $\tilde{k}$ $(k^\star)$ sur la Figure 2.13. La dérivée première $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}$ est positive et la dérivée seconde $\frac{\partial^2 k_{t+1}}{\partial k_t^2}$ est négative en raison de l'existence de rendements décroissants dans l'accumulation du capital. Le niveau stationnaire du stock de capital est obtenu à l'intersection de la courbe $g(k_t)$ et de la bissectrice. Pour s'assurer que l'état-stationnaire est unique et stable, il faut que deux conditions soient remplies : $\lim_{k\to 0} g'(k) = +\infty$ et $\lim_{k\to\infty} g'(k) = 0$. La première condition garantit que $g(k)$ ne coupe pas la bissectrive pour

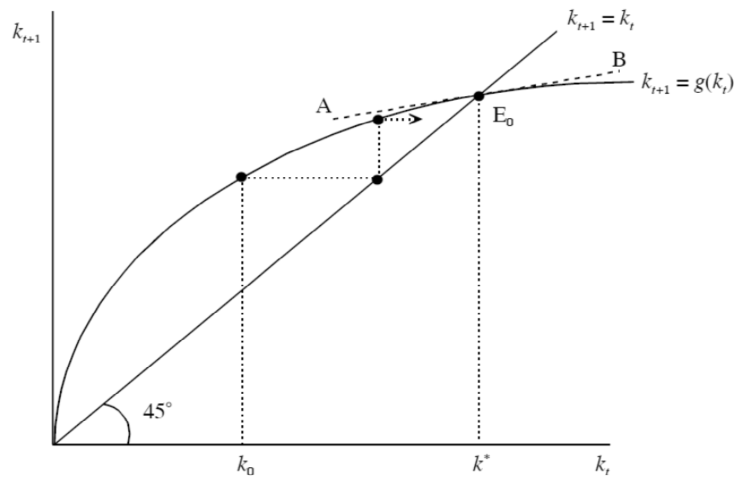

Fig. 2.13 – Modèle à générations imbriquées Diamond-Samuelson et stabilité de la dynamique de l'économie - Source : Chapitre 17, Heijdra (2009) The Foundations of Modern Macroeconomics. Second edition. Oxford University Press.

des valeurs faibles de k ; et la deuxième condition garantit que la courbe $g(k)$ coupe la bissectrice pour des valeurs élevées du capital. La convergence vers l'équilibre est assurée car $0 < g'(\tilde{k}) < 1$.

2.3.4.2 L'analyse de l'équation dynamique sous forme log-linéaire

Il existe une façon plus simple de montrer que l'économie converge vers un équilibre de long terme en mettant le modèle dynamique sous forme log-linéaire. Comme l'épargne est égale à $S_t = \frac{\epsilon_L}{2+\rho} k_t^{1-\epsilon_L}$, on obtient sous forme logarithmique :

$$\ln S_t = \ln\left(\frac{\epsilon_L}{2+\rho}\right) + (1-\epsilon_L)\ln k_t.$$

Comme $k_{t+1} = \frac{S_t}{1+n}$, En notant

$$\ln x = \ln\left(\frac{\epsilon_L}{2+\rho}\right) - \ln(1+n) = \ln\left[\frac{\epsilon_L}{(2+\rho)(1+n)}\right]. \tag{2.79}$$

L'équation dynamique du stock de capital par travailleur s'écrit donc :

$$\ln k_{t+1} = (1-\epsilon_L)\ln k_t + \ln x. \tag{2.80}$$

L'équation (2.80) est une équation aux différences car le stock de capital en $t+1$ dépend de sa valeur passée. Elle est d'ordre 1 car la valeur en $t+1$ ne dépend que de la valeur à la période précédente, cad en t. Elle est linéaire car la relation entre la valeur courante et la valeur passée est linéaire. Elle est à coeffcients constants car le coefficient est constant. Pour trouver la solution de cette équation de récurrence, il faut d'abord trouver la solution particulière puis la solution à l'équation homogène en posant $\ln x = 0$ (cad $x = 1$). Il suffira ensuite d'ajouter les deux solutions pour trouver la solution de l'équation non homogène.

La solution particulière de l'équation différentielle non homogène correspond à la valeur de long terme du stock de capital par travailleur et consiste donc à se placer à long terme lorsque l'accumulation de capital cesse. Pour déterminer cette solution, il suffit de poser $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$ pour toutes les valeurs de t :

$$\ln \tilde{k} = \frac{\ln x}{\epsilon_L}, \tag{2.81}$$

ce qui conduit à (2.76). La solution de l'équation homogène est de la forme $\ln k_t^H = A\left(1-\epsilon_L\right)^t$.[2] Pour écrire la solution de l'équation différentielle non homogène, on combine la solution particulière avec la solution de l'équation homogène : $\ln k_t = \ln \tilde{k} + \ln k_t^H$:

$$\ln k_t = \ln \tilde{k} + A\left(1-\epsilon_L\right)^t. \tag{2.82}$$

On détermine la constante A en posant $t = 0$ dans l'équation ci-dessus : $A = \ln k_0 - \ln \tilde{k}$. Finalement, la solution générale s'écrit :

$$\ln k_t = \ln \tilde{k} + \left(\ln k_0 - \ln \tilde{k}\right)\left(1-\epsilon_L\right)^t. \tag{2.83}$$

Comme $1 - \epsilon_L < 1$, lorsque $t \to \infty$, le stock de capital par travailleur tend vers son niveau de long terme. Pour étudier la convergence du stock de capital vers son niveau de long terme $\ln \tilde{k}$ lorsque l'éocnomie part d'un niveau initial $\ln k_0$, il faut déterminer une relation entre $\ln k_{t+1}$ et $\ln k_t$ en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} \ln k_{t+1} - \ln \tilde{k} &= \left(\ln k_0 - \ln \tilde{k}\right)\left(1-\epsilon_L\right)^{t+1}, \\ \ln k_t - \ln \tilde{k} &= \left(\ln k_0 - \ln \tilde{k}\right)\left(1-\epsilon_L\right)^t, \end{aligned}$$

ce qui implique la relation suivante :

$$\ln k_{t+1} - \ln \tilde{k} = \left(1-\epsilon_L\right) \times \left(\ln k_t - \ln \tilde{k}\right). \tag{2.84}$$

On peut représenter la dynamique de l'économie dans le plan $(\ln k_t, \ln k_{t+1})$. On trace d'abord la bissectrice qui représente le lien des points où le stock de capital par travailleur est identique au cours du temps $\ln k_t = \ln k_{t+1} = \ln \tilde{k}$: c'est donc la valeur de long terme. La pente de la trajectoire est égale à $1 - \epsilon_L$; comme elle est inférieure à 1, la trajectoire a une pente plus faible que celle de la bissectrice. La droite d'équation (2.84) coupe la bissectrice au point $\tilde{k}$ qui correspond à la valeur de long terme du stock de capital par travailleur.

Pour déterminer l'évolution du stock de capital par travailleur, il faut réécrire l'équation dynamique de la façon suivante :

$$\ln k_{t+1} = \epsilon_L \times \ln \tilde{k} + \left(1-\epsilon_L\right) \times \ln k_t.$$

[2] Lorsque l'équation de récurrence est du type $p_t = ap_{t-1}$, alors la solution s'écrit $p_t = Aa^t$. L'équation de récurrence du premier ordre à coefficients constants et non homogène s'écrit :

$$p_{t+1} = ap_t + b.$$

On peut exprimer le prix de l'actif financier en t en fonction de ses valeurs passées par substitution successive :

$$\begin{aligned} p_t &= ap_{t-1} + b = a\left(ap_{t-2} + b\right) + b = a^2 p_{t-2} + b\left(1+a\right), \\ &= a^t p_0 + b\left(1 + a + ... + a^{t-1}\right), \\ &= a^t p_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), \\ &= a^t\left(p_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Il faut maintenant choisir une valeur de départ $\ln k_0$ pour le stock de capital par travailleur. C'est une droite d'ordonnée à l'origine $\epsilon_L \times \ln \tilde{k}$. A la période 1, $\ln k_1 = \epsilon_L \times \ln \tilde{k} + (1 - \epsilon_L) \times \ln k_0$ puis $\ln k_2 = \epsilon_L \times \ln \tilde{k} + (1 - \epsilon_L) \times \ln k_1$. En faisant la différence :

$$\ln k_2 - \ln k_1 = (1 - \epsilon_L) \times (\ln k_1 - \ln k_0) .$$

Comme la pente $(1 - \epsilon_L)$ est inférieure à 1, les variations du stock de capital sont de moins en moins importantes d'une période à l'autre car le salaire augmente moins vite que le capital si bien que l'épargne s'accroît moins vite que le capital et donc au bout d'un moment, la différence entre l'épargne des jeunes $L_t .S_t$ et la désépargne des retraités $(1 - \delta) .K_t$ permet juste de doter les travailleurs en nouveau capital et de remplacer les machines obsolètes mais ne permet pas d'augmenter le capital si bien que le stock de capital par travailleur devient constant. Comme dans le modèle de Solow, l'économie investit un montant juste nécessaire pour remplacer le capital obsolète δk et fournir du capital aux travailleurs qui arrivent sur le marché du travail $n \times k$.

2.3.5 L'extinction de la croissance

Pour montrer que la croissance s'éteint à long terme, il faut montrer que l'accumulation de capital physique cesse à un horizon lointain. Le PIB par travailleur $y_t = f(k_t)$ croît tant que le capital par travailleur k_t augmente. Lorsque le stock de capital par travailleur reste constant, c'est-à-dire $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$, alors la croissance s'éteint. Comme

$$k_{t+1} = \frac{W_t}{(1+n) \times (2+\rho)}.$$

En utilisant le fait que $W_t = \epsilon_L k_t^{1-\epsilon_L}$ et en divisant les membres de gauche et de droite par k_t, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{k_{t+1}}{k_t} &= \frac{\epsilon_L k_t^{1-\epsilon_L}}{(1+n) \times (2+\rho) k_t}, \\ &= \frac{\epsilon_L k_t^{-\epsilon_L}}{(1+n) \times (2+\rho)}. \end{aligned}$$

En raison de rendements décroissants par rapport à l'accumulation de capital,

$$\lim_{k_t \to \infty} k_t^{-\epsilon_L} = 0,$$

en calculant la limite quand l'indice t tend vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{k_t \to \infty} \frac{k_{t+1}}{k_t} = 0.$$

Donc la courbe k_{t+1}/k_t qui est décroissante par rapport à k_t coupe la droite horizontale k_{t+1}/k_t représentant le lien des niveaux stationnaires de capital par travailleur : la croissance s'éteint donc à long terme.

2.3.6 L'efficience de l'équilibre de long terme

Dans cette sous-section, nous analysons si l'équilibre de long-terme est efficient. Le capital par travailleur à l'équilibre de long terme $\tilde{k}$ est dit socialement optimal de telle sorte que l'utilité intertemporelle est la plus élevée possible et tous les individus ont le même niveau d'utilité. L'utilité dépend de la consommation d'un individu lorsqu'il est jeune puis âgé. Ces niveaux de consommation dépendent du stock de capital par travailleur. Puisque le niveau de consommation (comme nous allons le montrer) dépend du stock de capital par travailleur, l'objectif est donc de comparer le capital par travailleur atteint dans la situation d'économie décentralisée où les individus ne se coordonnent pas pour prendre leurs décisions et une situation d'économie centralisée (avec un planficateur central fictif, l'Etat par exemple) où l'Etat déciderait du stock de capital par travailleur à atteindre de façon à atteindre la consommation la plus élevée. Comme nous nous situons à l'équilibre de long terme, nous enlevons l'indice temporel t.

De la même façon que dans le modèle de Solow, le revenu par habitant est maximum lorque le taux d'épargne est de 100% mais évidemment, le bien-être qui dépend de la consommation peut être amélioré en réduisant l'épargne. La règle d'or dans un modèle avec générations imbriquées est identique : le taux de rendement du capital égal à la productivité marginale du capital nette du taux de dépréciation doit être égale au taux de croissance de la population. L'explication est qu'une augmentation du capital par travailleur a deux effets de sens opposé sur la consommation : i) un niveau du capital par travailleur plus important élève le revenu national et donc la consommation, et ii) un niveau du capital par travailleur plus élevé nécessite une épargne plus élevée destinée à financer l'investissement reproductif (dépréciation + doter les nouveaux travailleurs en capital). Lorsque les deux effets de sens opposé se compensent exactement, c'est-à-dire le gain d'augmenter le capital par travailleur d'une unité supplémentaire est juste égal au coût marginal d'augmenter le capital par travailleur, la consommation est maximum.

Pour déterminer le stock de capital efficient, l'Etat va chercher le stock de capital qui permet d'atteindre la consommation la plus élevée étant donné la contrainte de ressources :

$$f(k) - (n+\delta)k = \frac{C^O}{1+n} + C^Y. \tag{2.85}$$

pour déterminer (2.85), on utilise le fait que $Y_t = C_t + I_t = L_t C_t^Y + L_{t-1} C_{t-1}^O + I_t$ avec I_t à l'état-stationnaire donné par $(n+\delta) K_t$. En divisant par L_t et en utilisant le fait que $L_{t-1} = \frac{L_t}{1+n}$ puis en supprimant l'indice temporel comme nous sommes à long terme, on obtient (2.85).

Nous considérons un état stationnaire, cad où le capital par travailleur est constant mais où la population continue de croître au ryhtme n et le capital se déprécie au taux δ. Finalement, la croissance de la population du capital et sa dépréciation joue dans le sens d'une réduction de k. Donc le planificateur doit veiller à ce qu'une portion $(n+\delta)k$ de la production par travailleur soit allouée au renouvellement du stock de capital. Le reste peut être alloué aux dépenses de consommations des individus jeunes et âgés. Pour comprendre la relation entre k et c, il faut tracer la fonction $f(k)$ qui est concave et la droite $(n+\delta)k$ en portant le stock de capital par travailleur k sur l'axe horizontal. Notons C la consommation totale $\frac{C^O}{1+n} + C^Y$. La relation (2.85) s'écrit

$$f(k) - (n+\delta)k = C.$$

Le maximum est atteint lorsque l'écart entre la production par travailleur et l'investissement reproductif est maximum. A partir de l'équation ci-dessus, on obtient donc une relation entre la consommation C et le stock de capital par travailleur k, $C = C(k)$ qui prend l'allure d'une courbe en U inversée.

En différentiant (2.85) par rapport à C et k et en annulant la dérivée première, la consommation optimale est atteinte lorsque la productivité marginale du capital est égale à la somme du taux de dépréciation du capital et de la croissance de la population :

$$\frac{dC}{dk} = f'(k) - (n + \delta) = 0.$$

Ce niveau de stock de capital est appelé stock de capital de la règle d'or et permet d'atteindre la consommation la plus élevée et donc l'utilité maximium :

$$f'\left(k^{\text{or}}\right) = n + \delta. \tag{2.86}$$

Si $f'(k) - \delta = n$, alors la consommation globale est à son maximum. Supposons maintenant que $f'(k) - \delta < n$. Cette inégalité implique qu'on pourrait augmenter la consommation en diminuant le capital par travailleur : bien que l'on baisse le PIB par travailleur, on réduit davantage l'épargne nécessaire pour renouveler le capital par travailleur ce qui fait augmenter la consommation. En d'autres termes, pour $k > k^{or}$, la productivité marginale (nette de la dépréciation) est trop basse par rapport à ce qu'elle devrait être pour permettre de fournir du capital au nouveaux travailleurs (qui croît à un taux n) ; comme l'économie doit maintenir le stock de capital par travailleur constant, il faut prendre des ressources qui aurait pu être consommée si $f'(k) - \delta = n$.

Une manière alternative (plus rigoureuse) de déterminer la règle d'or est de résoudre le programme de maximisation du bien-être suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{C^Y, C^O, k} \ln\left(C^Y\right) + \frac{\ln\left(C^O\right)}{1+\rho}, \\ = \quad & \max_{C^Y, k} \ln\left(C^Y\right) + \frac{\ln\left\{(1+n)\left[f(k) - (n+\delta)\ .k - C^Y\right]\right\}}{1+\rho}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

En différentiant par rapport à C^Y et par rapport à k, on obtient la règle d'or :

$$\frac{C^O\ .(1+\rho)}{C^Y} = (1+n)\,, \tag{2.88a}$$

$$f'(k) = n + \delta. \tag{2.88b}$$

D'après la seconde condition (2.88b), la productivité marginale du capital nette du taux de dépréciation doit être égale au taux de croissance de la population. La première condition (2.88a) indique que le taux marginal de substitution inter-générationnel doit être égal à l'accroissement de la population puisque le taux d'intérêt est égal à n. De manière intuitive, le planaficateur, une fois choisi le niveau de capital de la règle d'or, doit décider de l'allocation du capital entre travailleurs et retraités. Lorsqu'il effectue ce partage, il prend en compte que lorqu'il alloue une unité de capital de plus aux jeunes, il retire du même coup $1 + n$ unités de capital aux retraités puisque les jeunes sont en plus grand nombre (c'est-à-dire $\frac{L_t}{L_{t-1}} = 1 + n$). Cet effet le conduit à modérer l'allocation du capital vers les jeunes. De l'autre côté, un taux de préférence pour le présent élevé conduit le planaficateur à allouer plus de capital vers les jeunes car le planaficateur valorise davantage l'utilité des travailleurs.

Une fois que le planificateur a déterminé le capital par travailleur de la règle d'or, il alloue les ressources consacrées à la consommation, $f\left(k^{or}\right) - (n+\delta)\ .k^{or}$ entre les jeunes et les retraités :

$$C^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} \cdot \left[f\left(k^{or}\right) - (n+\delta)\ .k^{or} \right].$$

Le problème pour l'individu dans une économie décentralisée prend le taux d'intérêt comme donné sans prendre en compte la contrainte de ressources à long terme. Par exemple si l'individu est très patient, il va épargner beaucoup ce qui va conduire à une forte accumulation du capital qui va sera permise grâce à la baisse du taux d'intérêt mais le problème est qu'à long terme, cette accumulation excessive réduira la consommation en-dessous du niveau optimal.

Comme la productivité marginale du capital nette du taux de dépréciation correspond au taux d'intérêt, r, pour évaluer dans quelle mesure l'économie décentralisée accumule de manière excessive ou de manière insuffisante du capital, il est nécessaire de calculer le taux de rendement du capital $\tilde{r} = f'\left(\tilde{k}\right) - \delta = (1-\epsilon_L)\left(\tilde{k}\right)^{-\epsilon_L} - \delta$ prévalant à l'état-stationnaire en utilisant le capital par travailleur de long terme (2.76) :

$$\tilde{r} = (1-\epsilon_L)\left[\frac{\epsilon_L}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{-\frac{\epsilon_L}{\epsilon_L}} - \delta = \frac{(1-\epsilon_L)(1+n)(2+\rho)}{\epsilon_L} - \delta. \tag{2.89}$$

Pour déterminer une valeur de $\tilde{r}$, il est nécessaire de donner des valeurs aux paramètres. La part distributive du travail ϵ_L est de 65% environ dans les pays de l'OCDE ; comme une période dans le modèle correpond à une génération, il est nécessaire de transformer les taux de croissance annuels moyens en taux de croissance moyen par génération :

$$\frac{L_t}{L_{t-1}} = \left(1+n^{\text{an}}\right)^{30}, \quad n^{30\ \text{ans}} = \left(1+n^{\text{an}}\right)^{30} - 1.$$

Le taux de croissance annuel moyen de la population n^{an} est de 0.8% et donc $n^{30\ \text{ans}} = (1.008)^{30} - 1 = 0.27$. Le capital se déprécie en moyenne par an de 5% ce qui implique $1-\delta = \left(1-\delta^{\text{an}}\right)^{30} = (0.95)^{30}$ ou encore $\delta = 1-(0.95)^{30} = 0.785$. Le taux de préférence pour le présent est de 1% ce qui implique $\rho = (1.01)^{30} - 1 = 0.348$. En introduisant ces paramètres dans (2.89), on trouve que :

$$r^{30} = \frac{0.35\ .(1+0.27)\ .(2+0.348)}{0.65} - 0.785 = 0.820,$$

ou en taux annualisé :

$$r^{\text{an}} = (1+\tilde{r})^{1/30} - 1 \simeq 0.02 = 2\% > n = 0.8\%,$$

ce qui un peu plus de deux fois plus élevé que le taux de croissance de la population. Ce résultat suggèrerait une accumulation de capital insuffisante.

Pour ramener l'économie vers le stock de capital par travailleur de la règle d'or, Diamond (1965) propose dans son article intitulé 'National Debt in a Neoclassical Growth Model' publié dans la revue *American Economic Review* d'utiliser la dette publique. La contrainte budgétaire de l'Etat implique l'égalité entre les recettes et les ressources. Les recettes sont constituées de l'émission de dette publique en $t+1$, $B_{t+1} - B_t$, ainsi que de l'impôt sur les jeunes travailleurs, qui permettent de couvrir les dépenses. Les dépenses de l'Etat sont composées des dépenses publiques G_t, du paiement des intérêts sur la dette publique $r_t \times B_t$. La contrainte budgétaire s'écrit donc :

$$G_t + (1+r_t)\, B_t = B_{t+1} + L_t\ .T_t^Y.$$

En divisant les membres de gauche et de droite de la contrainte budgétaire de l'Etat, on obtient :

$$\frac{G_t}{L_t} + (1 + r_t) \frac{B_t}{L_t} = \frac{L_{t+1}}{L_t} \frac{B_{t+1}}{L_{t+1}} + T_t^Y,$$

et en utilisant le fait que $L_t = (1 + n) L_{t-1}$ puisque la population croît au taux n, on obtient la contrainte budgétaire de l'Etat exprimée par habitant.

$$g_t + (1 + r_t) b_t = (1 + n) b_{t+1} + T_t^Y. \tag{2.90}$$

Dans la fiche de TD 1, on montre que l'épargne par habitant permet de financer la dette publique ainsi que le stock de capital par travailleur :

$$L_t S_t = K_{t+1} + B_{t+1}, \quad S_t = (1 + n) \times (k_{t+1} + b_{t+1}). \tag{2.91}$$

Pour aboutir à l'équation ci-dessus, on utilise l'équilibre sur le marché des biens et services $Y_t = C_t + I_t + G_t$ en remplaçant G_t par $B_{t+1} - (1 + r_t) B_t$, en utilisant le fait que les retraités consomment un montant $L_{t-1} C_t^O = R_t K_t + (1 - \delta) K_t + (1 + r_t) B_t$, et les travailleurs jeunes un montant $L_t C_t^Y = L_t \left(W_t - T_t^Y - S_t\right)$, et en utilisant le fait que l'investissement est égal à $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$. D'après (2.91), l'épargne par travailleur né à la date t permet de doter les travailleurs de la génération suivante en capital et d'assurer le financement de la dette publique qui augmente au rythme de l'accroissement de la population de façon à financer les intérêts sur la dette $\tilde{r}\ .b$.

A long terme, le stock de capital s'établit à $\tilde{k}$. Si $k > k^{\text{or}}$, l'Etat doit réduire le stock de capital en augmentant la dette publique de telle sorte $r = (1 - \epsilon_L) (k)^{-\epsilon_L} - \delta = n$. L'Etat doit choisir un niveau de dette publique à long terme de telle sorte que le taux d'intérêt r soit égal au taux de croissance de la population n, et que l'équilibre sur le marché des capitaux soit assuré (avec $k_{t+1} = k_t = k$ et $b_{t+1} = b_t = b$) :

$$k + b = \frac{S}{1 + n} = \frac{W}{(1 + n)(2 + \rho)}, \tag{2.92}$$

où le salaire est égal à :

$$W = \epsilon_L (k)^{1-\epsilon_L} = \epsilon_L \times k \times (k)^{-\epsilon_L} = \epsilon_L \times k \times \frac{r + \delta}{1 - \epsilon_L} = \epsilon_L \times k \times \frac{n + \delta}{1 - \epsilon_L}.$$

où on a utilisé le fait que $r + \delta = (1 - \epsilon_L) (k)^{-\epsilon_L}$ ainsi que $r = n$. En utilisant l'expression du salaire, l'équilibre sur le marché des capitaux (2.92) devient :

$$k + b = \frac{\epsilon_L (n + \delta)}{(1 + n) (2 + \rho) (1 - \epsilon_L)} k = \frac{n + \delta}{r + \delta} k, \tag{2.93}$$

où le terme $\frac{\epsilon_L(n+\delta)}{(1+n)(2+\rho)(1-\epsilon_L)} > 1$ car $(1 + n) (2 + \rho) (1 - \epsilon_L) = \epsilon_L (r + \delta)$ en économie décentralisée et comme $r < n$, le numérateur $n + \delta$ est supérieur au dénominateur $r + \delta$. En différentiant (2.93), la dette publique doit être augmentée d'un montant indiqué par :

$$db = \left[\left(\frac{n + \delta}{r + \delta}\right) - 1\right] dk > 0, \quad \text{si} \quad n = r^{\text{or}} > r, \tag{2.94}$$

où le terme $\left(\frac{n+\delta}{r+\delta}\right) - 1 > 0$ représente l'excès de productivité de la règle d'or par rapport à la productivité marginale du capital. L'Etat va donc réallouer cet excès de capital vers le financement de la dette publique de façon à amener r au niveau de n. Dans la fiche de TD 1, vous montrerez que la dette publique, en s'élevant, évince le capital, puisqu'elle redirige une partie plus grande de l'épargne vers le financement du déficit budgétaire. Lorsque la règle d'or n'est pas satisfaite, en supposant que $r_t > n$, une hausse de la dette publique implique également un accroissement de l'impôt de façon à payer les intérêts supplémentaire. Il s'ensuit une baisse du revenu disponible, de l'épargne et donc du capital car une partie de l'épargne est maintenant destinée au financement de la dette publique.

2.4 Croissance endogène dans un modèle à générations imbriquées

De la même façon que dans le modèle de Solow, la croissance de l'économie est tirée par l'accumulation de capital par travailleur. Et en raison de l'hypothèse de rendements décroissants dans l'accumulation de capital, la croissance économique ralentit puis s'éteint à long terme en l'absence d'un progrès technique exogène. La raison est que la rentabilité du capital tend vers zéro lorsque le stock de capital par travailleur devient très élevé :

$$\lim_{k_t \to \infty} \frac{f(k_t)}{k_t} = \lim_{k_t \to \infty} \frac{f'(k_t)}{1} = 0. \tag{2.95}$$

D'après le modèle de Solow, l'accumulation du capital exprimée en pourcentage est tirée par l'épargne nette de l'investissement reproductif :

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{s\,.f(k_t)}{k_t} - (n + \delta). \tag{2.96}$$

Comme le revenu par habitant augmente moins vite que le capital par travailleur, la croissance s'éteint. Toutefois, dans le modèle de Solow, il est possible d'engendrer une croissance persistante lorsque la technologie de production permet une substitution 'forte' du capital au travail :

$$\lim_{k_t \to \infty} \frac{f(k_t)}{k_t} = \alpha^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > 0, \tag{2.97}$$

où $\sigma > 1$ est l'élasticité de substitution entre capital et travail. Dans ce cas, la croissance économique qui est déterminée par le taux d'accumulation du capital physique ne s'éteint pas :

$$\lim_{k_t \to \infty} \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = s\,.\alpha^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > 0 - (n + \delta). \tag{2.98}$$

Dans un article publié en 1992, Jones et Manuelli ont montré qu'il était possible d'engendrer une croissance persistante dans un modèle à générations imbriquées. Cette croissance persistante est dite endogène car elle n'est pas induite par un progrès technique exogène. Alors que dans le modèle de Solow, un seul ingrédient est nécessaire pour engendrer une croissance persistante, dans le modèle de Jones et Manuelli (1992), deux ingrédients sont nécessaires. Le premier ingrédient est la mise en place d'un système de redistribution entre les travailleurs et les capitalistes. Le deuxième ingrédient est la nécessité d'une technologie de production 'flexible' reflétée par une élasticité de substitution constante supérieure à 1.

2.4.1 Le cadre d'analyse

On décrit d'abord le cadre d'analyse en présentant le bloc de choix de consommation puis dans un deuxième temps le bloc de choix des facteurs de production.

2.4.1.1 Les ménages

On considère que l'économie est constituée à chaque date t de travailleurs (individus jeunes) et de retraités (individus âgés). Lorsqu'il est jeune à la date t, l'agent représentatif travaille et obtient en contrepartie un salaire W_t qu'il répartit entre consommation C_t^Y qui lui procure une utilité instantanée $\ln C_t^Y$, et épargne S_t. Puis une fois retraité, l'agent représentatif a un revenu qui correspond à son épargne S_t plus le rendement des fonds épargnés. Les retraités sont propriétaires du capital et l'épargne est donc rémunéré au taux r_{t+1} qui est déterminé par la productivité marginale du capital nette de la dépréciation du capital δ. On suppose l'absence de croissance de la population. On normalise la population totale à 1, cad $L_t = L_{t-1} = L = 1$. On note ρ le taux d'escompte physchologique. L'utilité intertemporelle s'écrit de la façon suivante :

$$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho} \ln C_{t+1}^O. \tag{2.99}$$

L'individu à la date t consacré une partie de son salaire à la consommation et le reste est épargne :

$$C_t^Y + S_t = W_t. \tag{2.100}$$

Une fois âgé, l'individu consomme le principal et les intérêts :

$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) S_t. \tag{2.101}$$

En utilisant la contrainte budgétaire à la date $t+1$, $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{(1+r_{t+1})}$, on élimine l'épargne de la contrainte budgétaiore (2.100) ce qui conduit à la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t. \tag{2.102}$$

En utilisant (2.102), $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)$, on peut éliminer C_{t+1}^O de l'utilité intertemporelle (2.99) :

$$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho} \ln \left[(1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)\right]. \tag{2.103}$$

En différentiant l'utilité intertemporelle par rapport à C_t^Y puis en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité habituelle entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente (cad des travailleurs jeunes) :

$$\frac{C_{t+1}^O (1+\rho)}{C_t^Y} = (1 + r_{t+1}). \tag{2.104}$$

En utilisant (2.104), $C_{t+1}^O = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y$, de façon à éliminer C_{t+1}^O de la contrainte budgétaire intertemporelle, on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t :

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t. \tag{2.105}$$

Puis en combinant la condition du premier ordre (2.104) et (2.105), on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est retraité en fonction du salaire W_t :

$$C_{t+1}^O = \frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y = \frac{1 + r_{t+1}}{2+\rho} W_t. \tag{2.106}$$

Enfin, en substituant (2.105) dans la contrainte budgétaire à la date t (2.100), on obtient l'épargne de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t :

$$S_t = W_t - C_t^Y = \frac{1}{2+\rho} W_t. \tag{2.107}$$

Nous avons vu précédemment que le taux d'escompte psychologique ρ coïncide avec le taux de préférence pour le présent. La propension marginale à consommer le salaire W_t dans le présent $\frac{\partial C_t^Y}{\partial W_t} = \frac{1+\rho}{2+\rho}$ croît avec ρ et donc la propension à épargner $\frac{1}{2+\rho}$ diminue avec ρ.

2.4.1.2 Les firmes

La firme représentative utilise du travail L_t et du capital K_t pour produire un bien final en quantité Y_t. Le coût d'une unité de travail est égal au salaire W_t et le coût d'une unité de capital est égal à R_t^K. Les facteurs de production sont combinés selon une technologie de production à élasticité de substitution constante :

$$F(K_t, L_t) = A\left[\alpha (K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{2.108}$$

où le paramètre σ est supposé supérieur à 1. Ce paramètre indique de combien augmente le stock de capital par travailleur lorsque le coût du travail W s'élève relativement au coût du capital R de 1% :

$$\sigma \equiv \frac{\partial k}{\partial \omega} \times \frac{\omega}{k},$$

où $k = K/L$ et $\omega = W/R$. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise 1, le bien final étant le numéraire. On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite.

Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production :

$$\Pi_t \equiv F(K_t, L_t) - W_t L_t - R_t^K K_t. \tag{2.109}$$

Une fonction de production est à rendements d'échelle constants lorsqu'elle est homogène de degré 1 : $\lambda^1 Y_t = F[\lambda K_t, \lambda L_t]$:

$$\begin{aligned} & A\left[\alpha (\lambda K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(\lambda L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \\ = \quad & A\left\{\lambda^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[\alpha (K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(\lambda L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \lambda^1 Y_t. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Les conditions du premier ordre sont obtenues en différentiant le profit par rapport au capital et au travail et en annulant les dérivées partielles car de cette façon, la firme utilise une quantité de facteur permettant d'atteindre le profit le plus élevé (le profit prend la forme d'une courbe en cloche, la tangente à la fonction de profit a une pente nulle au sommet de Π_t) :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = R_t^K, \tag{2.111a}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t, \tag{2.111b}$$

où $\partial Y_t/\partial K_t = \alpha \times (K_t)^{-\frac{1}{\sigma}} \times (Y_t)^{\frac{1}{\sigma}}$, et $\partial Y_t/\partial L_t = (1-\alpha) \times (K_t)^{-\frac{1}{\sigma}} \times (Y_t)^{\frac{1}{\sigma}}$.

Sous la condition de rendements d'échelle constants, le théorème d'Euler implique que la production est égale à la somme des contributions de chaque facteur de production :

$$Y_t \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} L_t.$$

L'hypothèse de concurrence parfaite sur les marchés des biens et des facteurs de production implique que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale :

$$Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t. \tag{2.112}$$

Donc le profit Π_t est nul.

2.4.1.3 L'équilibre sur le marché des biens et services et l'équation d'accumulation du capital

Nous allons maintenant écrire l'équilibre sur le marché des biens et services en définissant au préalable l'investissement I_t. L'investissement correspond à l'accumulation du capital nécessaire pour amener le capital à son niveau optimal $K_{t+1} - K_t$, et à l'investissement nécessaire pour remplacer les machines obsolètes δK_t :

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t. \tag{2.113}$$

D'après l'équilibre sur le marché des biens et services, la production finale Y_t est égale la dépense finale composée de la consommation et de l'investissement I_t :

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{2.114}$$

A l'aide des contraintes budgétaires des travailleurs jeunes à la date t et des retraités à la même date, nous allons déterminer la consommation totale $C_t = C_t^Y + C_t^O$. La consommation total est composée de la consommation des travailleurs jeunes C_t^Y et des retraités C_t^O, La consommation des travailleurs jeunes est égale à la part du salaire qui n'est pas épargnée : $C_t^Y = W_t - S_t$. La consommation des retraités est égale au rendement du capital plus le capital net de la dépréciation $C_t^O = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t$ (ce sont les propriétaires de l'entreprise de location du capital). Comme la population $L_t = L$ est constante et normalisée à 1, la consommation totale C_t est égale à :

$$C_t = C_t^Y + C_t^O = W_t - S_t + R_t^K K_t + (1-\delta) K_t. \tag{2.115}$$

En utilisant le fait qu'en présence de rendements d'échelle constants, $Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, et en substituant (2.113) et (2.115) dans l'équilibre du marché des biens et services, et en utilisant le fait qu'à l'optimum, $S_t = S(W_t)$:

$$Y_t = R_t^K K_t + W_t L_t = W_t - S(W_t) + R_t^K K_t + (1-\delta) K_t + K_{t+1} - K_t + \delta K_t,$$

qui peut être réécrite $S(W_t) = K_{t+1}$; $S_t = K_{t+1}^S$ représente le capital offert (ici ce n'est pas un flux, c'est un stock de richesse financière prenant la forme de capital qui est le seul actif) et K_{t+1}^D le capital demandé. Comme il y a équilibre sur le marché des capitaux, $K_{t+1}^D = K_{t+1}$ et donc

$$S(W_t) = K_{t+1}. \tag{2.116}$$

2.4.2 Le taux de croissance de l'économie

D'après la fonction d'épargne (à l'optimum) décrite par (2.107), $S_t = \frac{1}{2+\rho} W_t$. En utilisant l'équilibre sur le marché des capitaux (2.116), et en divisant les membres de gauche et de droite par K_t, on obtient :

$$\frac{S_t}{K_t} = \frac{1}{2+\rho} . \frac{W_t}{K_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}. \tag{2.117}$$

La croissance va s'éteindre si $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ tend vers zéro à mesure que le stock de capital K_t s'élève. Pour évaluer si le terme $\frac{1}{2+\rho} . \frac{W_t}{K_t}$ tend vers zéro, il faut déterminer d'abord l'expression du salaire décrite par $W_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) \left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$; puis il est nécessaire de calculer une expression du ratio W_t/K_t en fonction du capital K_t. Puis nous allons montrer que $\frac{W_t}{K_t}$ converge vers les valeurs suivantes lorque le capital prend des valeurs extrêmes :

$$\lim_{K_t \to 0} \frac{W_t}{K_t} = +\infty, \quad \lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0, \tag{2.118}$$

en utilisant le fait que $\sigma > 1$.

D'après la condition du premier ordre (2.111b), $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t$. La productivité marginale du travail peut être écrite simplement en remarquant que $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) \left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ avec la production par travailleur donnée par :

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = A \left[\alpha (k_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = A \left[\alpha (K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.119}$$

où $k_t \equiv K_t/L_t$ et on pose $\lambda = \frac{1}{L_t}$ dans (2.110). En utilisant le fait que $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) \left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ et (2.119), on peut exprimer le ratio W_t/K_t en fonction du stock de capital :

$$\frac{W_t}{K_t} = (1-\alpha) A \frac{\left[\alpha (K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}}{K_t}. \tag{2.120}$$

Pour déterminer la valeur de $\frac{W_t}{K_t}$ lorsque K_t tend vers zéro, il suffit de réécrire (2.120) de la façon suivante :

$$\left\{K_t^{-(\sigma-1)} \times \left[\alpha (K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]\right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} = (1-\alpha) A \left[\alpha (K_t)^{-\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}} + (1-\alpha) (K_t)^{-(\sigma-1)}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}, \tag{2.121}$$

où $(K_t)^{-\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}} = \frac{1}{(K_t)^{\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}}}$ et $(K_t)^{-(\sigma-1)} = \frac{1}{(K_t)^{(\sigma-1)}}$. En utilisant le fait que $\sigma > 1$, on obtient que le ratio W_t/K_t converge vers les valeurs suivantes quand le capital prend des valeurs extrêmes :

$$\lim_{K_t \to 0} \frac{W_t}{K_t} = +\infty, \quad \lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0.$$

On note γ_t^K le taux de croissance du capital défini de la façon suivante $\gamma_t^K \equiv \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t}$. D'après (2.118), $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0$ et donc

$$\lim_{K_t \to +\infty} \frac{K_{t+1}}{K_t} = 0.$$

Il s'ensuit à long terme, cad lorsque $t \to \infty$, le stock de capital cesse de croître et se maintient au nievau $K_{t+1} = K_t = \tilde{K}$:

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_t^K = \frac{\tilde{K} - \tilde{K}}{\tilde{K}} = 0. \tag{2.122}$$

La Figure 2.14 illustre la convergence de l'économie vers l'équilibre de long terme en portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical. La droite horizontale $\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$ représente le lieu des points où le capital est constant. Comme l'équation d'accumulation du capital $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\frac{W_t}{K_t}$ est décroissante à mesure que K_t augmente, il existe un état-stationnaire unique en E_0 associé à un stock de capital constant $\tilde{K}$ et donc une croissance nulle $\gamma_\infty^K = \frac{\tilde{K}-\tilde{K}}{\tilde{K}} = 0$.

L'existence d'une croissance nulle à long terme s'explique par le fait qu'à mesure que le capital augmente, le salaire s'élève mais moins vite que le capital si bien que l'épargne qui représente une fraction fixe du salaire diminue au cours du temps lorsqu'elle est rapportée au capital, c'est-à-dire $\frac{S_t}{K_t}$ converge progressivement vers la valeur d'état stationnaire $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{\tilde{K}}{\tilde{K}} = 1$. Pourtant, dans le modèle de Solow, l'existence d'une substituabilité entre le capital et le travail permet d'éviter l'extinction de la croissance car la technologie de production est suffisamment flexible pour permettre l'utilisation d'un stock de capital toujours plus grand par rapport au travail. En revanche, dans le modèle à générations imbriquées, l'accumulation du capital se fait sur la seule base des revenus du travail ; les travailleurs doivent constituer une épargne suffisamment élevée grâce à leur salaire pour à la fois rembourser le capital nette de sa dépréciation $(1-\delta)\ .K_t$ aux retraités et investir un montant I_t, cad :

$$S_t = K_{t+1} = I_t + (1-\delta)\ .K_t.$$

A mesure que le stock de capital devient de plus en plus grand, les travailleurs jeunes doivent rembourser un stock de capital toujours plus grand de telle sorte que l'épargne engendrée par la hausse du salaire devient insuffisante puisque le salaire par unité de capital diminue à mesure que le capital augmente en raison de l'existence de rendements décroissants ; la croissance s'éteint donc à long terme.

2.4.3 Les conditions d'une croissance endogène : système fiscal de redistribution et $\sigma > 1$

On suppose maintenant que pour remédier au problème d'extinction de la croissance économique à long terme, l'Etat met en place une taxe $0 < \tau < 1$ sur la valeur ajoutée Y_t. Les recettes fiscales sont reversées aux travailleurs jeunes sous la forme d'un transfert forfaitaire noté T_t^Y. Nous allons d'abord écrire le budget de l'Etat. Les recettes fiscales sont représentées par les recettes fiscales τY_t et les dépenses ont représentées par les transferts T_t^Y. Le budget équilibré s'écrit (en l'absence de dette) :

$$\tau Y_t = L_t T_t^Y. \tag{2.123}$$

Nous réécrivons le profit Π_t' et les conditions du premier ordre qui résultent de la résolution du programme de maximisation du profit. Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production :

$$\Pi_t' \equiv (1-\tau) F(K_t, L_t) - W_t L_t - R_t^K K_t. \tag{2.124}$$

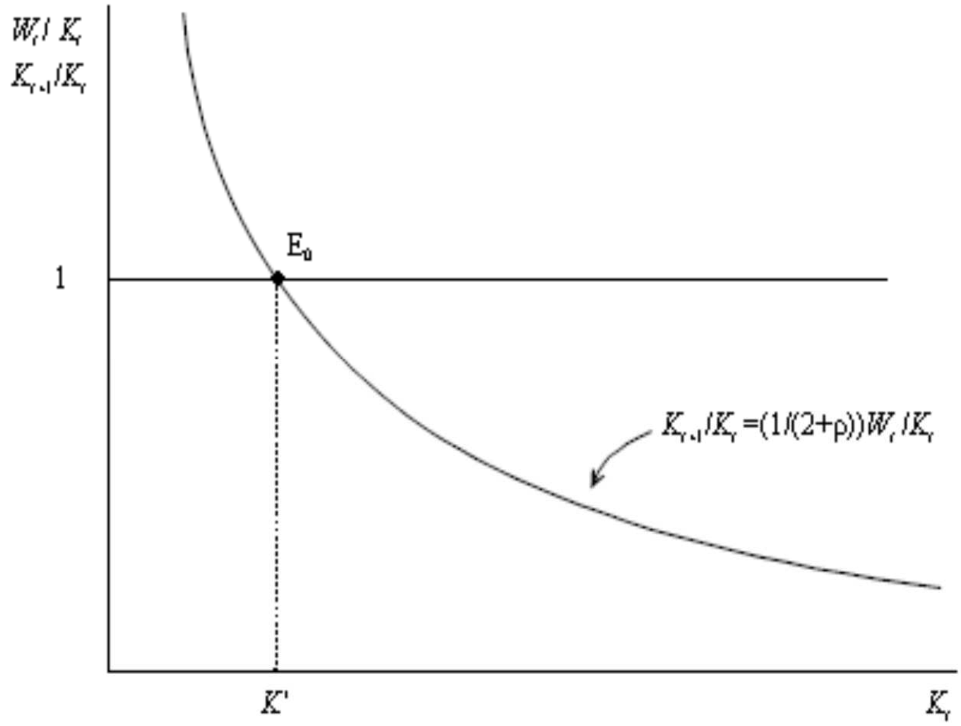

FIG. 2.14 – Extinction de la croissance à long terme dans un modèle à générations imbriquées - Source : Chapitre 17, Heijdra, Reijnders, and Romp (2009) Foundations of Modern Macroeconomics Second Edition. Exercise and Solutions Manual. Oxford University Press.

Les conditions du premier ordre sont obtenues en différentiant le profit par rapport au capital et au travail et en annulant les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \Pi_t'}{\partial K_t} = 0, \quad (1-\tau)\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = R_t^K, \tag{2.125a}$$

$$\frac{\partial \Pi_t'}{\partial L_t} = 0, \quad (1-\tau)\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t. \tag{2.125b}$$

Nous réécrivons la contrainte budgétaire à la date t de l'agent représentatif, puis la contrainte budgétaire intertemporelle. Puis nous résolvons le programme de maximisation intertemporelle de l'agent représentatif et déterminez les nouvelles expressions de la consommation C_t^Y et de l'épargne S_t.

La contrainte budgétaire de l'agent représentatif (2.100) lorsqu'il est un travailleur jeune devient :

$$C_t^Y + S_t = W_t + T_t^Y. \tag{2.126}$$

La contrainte budgétaire (2.101) lorsqu'il est retraité est inchangée, cad $C_{t+1}^O = (1+r_{t+1})\,S_t$. En utilisant la contrainte budgétaire à la date $t+1$, $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{(1+r_{t+1})}$, on élimine l'épargne de la contrainte budgétaire (2.126) ce qui conduit à la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t + T_t^Y. \tag{2.127}$$

En utilisant (2.127), $C_{t+1}^O = (1+r_{t+1})\left(W_t + T_t^Y - C_t^Y\right)$, on peut éliminer C_{t+1}^O de l'utilité intertemporelle (2.99) :

$$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho}\ln\left[(1+r_{t+1})\left(W_t + T_t^Y - C_t^Y\right)\right]. \tag{2.128}$$

En différentiant l'utilité intertemporelle par rapport à C_t^Y puis en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité habituelle entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente : $\frac{C_{t+1}^O(1+\rho)}{C_t^Y} = (1+r_{t+1})$. Donc la condition du premier ordre (2.104) est inchangée. En utilisant (2.104), $C_{t+1}^O = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y$, de façon à éliminer C_{t+1}^O de la contrainte budgétaire intertemporelle (2.127), on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t :

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}\left(W_t + T_t^Y\right). \tag{2.129}$$

En substituant (2.129) dans la contrainte budgétaire à la date t (2.126), on obtient l'épargne de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t plus du transfert forfaitaire T_t^T :

$$S_t = W_t + T_t^Y - C_t^Y = \frac{1}{2+\rho}\left(W_t + T_t^Y\right). \tag{2.130}$$

En déterminant au préalable l'expression des dépenses totales de consommation C_t, nous montrons à l'aide de la condition d'équilibre sur le marché des biens et services que la condition d'équilibre sur le marché des capitaux se modifie de la façon suivante :

$$S\left(W_t + T_t^Y\right) = K_{t+1}. \tag{2.131}$$

En utilisant (2.126), la consommation des travailleurs jeunes devient $C_t^Y = W_t + T_t^Y - S_t$. La consommation des retraités est inchangée : $C_t^O = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t$. En utilisant l'expression de l'investissement (2.113), cad $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$, et en utilisant l'équilibre sur le marché des biens et services (2.114), cad $Y_t = C_t + I_t$, on obtient :

$$Y_t = W_t L_t + L_t T_t^Y + R_t^K K_t + K_{t+1} - L_t S\left(W_t + T_t^Y\right),$$

où on a utilisé le fait que $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$. La somme de la consommation des retraités et de l'investissement est égal à $C_t^O + I_t = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t = R_t^K K_t + K_{t+1}$. Comme $Y_t = \tau \times Y_t + (1-\tau) \times Y_t$, en utilisant le budget équilibré de l'Etat (2.123), c'est-à-dire, $\tau Y_t = L_t T_t^Y$, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$(1-\tau) Y_t = W_t L_t + R_t^K K_t + K_{t+1} - L_t S\left(W_t + T_t^Y\right).$$

En utilisant la condition d'équilibre budgétaire de l'Etat (2.123) en en utilisant le fait que $(1-\tau) Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, l'équilibre sur le marché des biens et services est réécrit :

$$(1-\tau) Y_t = R_t^K K_t + W_t L_t = W_t + R_t^K K_t + K_{t+1} - S\left(W_t + T_t^Y\right),$$

ce qui donne l'équlibre sur le marché des capitaux (2.131). En substituant l'expression de l'épargne (2.130) dans la condition d'équilibre du marché des capitaux (2.131), et en divisant par le stock de capital K_t, on obtient :

$$\frac{S_t}{Kt} = \frac{1}{2+\rho}\frac{\left(W_t + T_t^Y\right)}{K_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}$$

En utilisant le fait que les taxes sur la valeur ajoutée sont redistribuées vers les travailleurs jeunes, l'équation d'accumulation du capital peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\left[\frac{W_t}{K_t} + \frac{\tau Y_t}{K_t}\right]. \tag{2.132}$$

La valeur vers laquelle converge le ratio W_t/K_t, c'est-à-dire $\lim_{K_t\to\infty}\frac{W_t}{K_t}$, est donnée par (2.118). Il faut donc calculer $\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t}$ ce qui nécessite au préalable de calculer Y_t/K_t.

En rapportant la production Y_t donnée par (2.108) au stock de capital K_t, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{K_t} &= A\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha)\left(L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\\ &= A\left[\alpha+\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\end{aligned}$$

où la deuxième ligne a été obtenue en utilisant $L_t = 1$. Comme $\lim_{K_t\to\infty}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} = 0$ lorsque $\sigma > 1$, on obtient :

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t} = A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} > 0. \tag{2.133}$$

Puis en faisant tendre K_t vers l'infini dans l'expression (2.132), on obtient

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\lim_{K_t\to\infty}\frac{W_t}{K_t}+\frac{\tau}{2+\rho}\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{\tau}{2+\rho}A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}, \tag{2.134}$$

où la deuxième ligne a été obtenue en utilisant (2.133) et (2.118).

Nous allons montrer qu'il existe deux situations selon que le terme donné par (2.133) est inférieur ou supérieur à 1. Lorsque le capital atteint sa valeur de long terme, alors $K_{t+1} = K_t = \tilde{K}$. Ce lieu des points est représenté par la droite horizontale sur la Figure 2.15 d'ordonnée à l'origine égale à 1. Il va donc apparaître deux situations selon que la courbe d'accumulation du capital (ou d'épargne) coupe cette droite horizontale ou pas. Si elle la coupe, alors l'économie atteint une situation où le capital cesse de croître et $\gamma_\infty^K = \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = 0$. En revanche, si elle ne la coupe pas, alors $\gamma_\infty^K > 0$ puisque cela signifie que le capital ne va pas cesser d'augmenter à long terme. Cette situation est possible seulement si le rapport $\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1$. D'après (2.134), cela est vrai si le taux de taxe τ est sufisamment élevé :

$$\tau > \frac{2+\rho}{A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}}. \tag{2.135}$$

Le taux de taxe permettant une croissance endogène s'élève avec le taux de préférence pour le préférence pour le présent ρ car ce dernier réduit l'incitation à épargner. Le taux de taxe diminue avec l'élasticité de substitution entre travail et capital σ : plus la technologie de production est flexible, c'est-à-dire plus il est simple pour les entreprises de substituter le capital au travail à mesure que le capital augmente, plus le rapport Y/K sera élevé, et moins l'Etat aura besoin de taxer la valeur ajoutée car l'assiette fiscale Y/K est plus élevée quand σ prend des valeurs plus fortes.

On note $\gamma_\infty^K = \tilde{\gamma} = \frac{K_{t+1}}{K_t} - 1$ le taux de croissance du capital :

$$\frac{\tau}{2+\rho}A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} = 1+\bar{\gamma}. \tag{2.136}$$

Tant que $\tilde{\gamma} > 0$, alors $\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1$ et la courbe décroissante d'accumulation du capital ne coupera jamais la droite horizontale $K_{t+1} = K_t$ et une croissance endogène, c'est-à-dire persistante avec $\gamma_\infty^K > 0$ est possible.

L'expression du taux de croissance (2.134) montre que la croissance s'élève avec le taux de taxe τ. L'explication est qu'un taux de taxe plus élevé permet un transfert forfaitaire T_t^Y plus important vers les travailleurs jeunes ce qui leur permet d'avoir une épargne plus forte et ainsi d'élever l'investissement : comme la production augmente avec le capital, l'économie devient plus riche. Le modèle préconise donc de redistribuer la richesse des plus âgés (les retraités) vers les plus jeunes (les travailleurs) pour soutenir l'épargne de ces derniers qui finance l'accumulation de capital. Ce transfert forfaitaire permet en fait de contrebalancer la diminution de l'épargne relativement au stock de capital qui fait ralentir l'accumulation du capital et conduit à l'extinction de la croissance (puisque l'on a toujours $\lim_{K_t \to \infty} \frac{W_t}{K_t} = 0$).

En conclusion, la possibilité d'une croissance à long terme repose sur deux piliers : i) une fonction de production à élasticité de substitution constante est nécessaire car à mesure que le capital augmente, le capital devient plus abondant et donc le travail relativement rare ; si la technologie de production ne permet pas de substituer aisément le capital au ravail, la croissance s'eteindra en raison de la rareté du travail ; dit autrement, à mesure que le capital augmente, le coût du travail s'élève et le coût du capital diminue et il faut que la firme ait la possibilité d'utiliser plus intensivement du capital au cours du temps (avec une Cobb-Douglas, la croissance s'éteint) à mesure que son coût diminue. Le deuxième élément a trait à ii) la redistribution des capitalistes (c'est-à-dire des retraités) vers les travailleurs car comme les salaires augmentent moins vite que le capital, au bout d'un moment, l'épargne sera insuffisante pour financer l'accumulation du capital car seuls les travailleurs jeunes épargnent. Parallèlement, les capitalistes obtiennent une rémunération positive à long terme puisque :

$$\lim_{K_t \to \infty} R_t = \lim_{K_t \to \infty} \frac{Y_t}{K_t} = A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}.$$

Dans le modèle de Solow, l'existence d'une fonction à élasticité de substitution constante avec $\sigma > 1$ permet d'assurer une croissance persistante en empêchant l'extinction de la rémunération du capital grâce à la flexibilité de la technologie de production qui permet à l'entreprise d'utiliser toujours plus de capital ce qui n'est pas le cas avec une fonction Cobb-Douglas. En revanche, dans un modèle à générations imbriquées, cette condition n'est pas suffisante car les capitalistes consomment le capital au lieu de l'accumuler. Pour contrebalancer cette décroissance de W/K, il est nécessaire de fournir un revenu supplémentaire au jeune $\tau \times Y/K$ qui permet de maintenir le rapport S/K constant à long terme. Cette épargne permet de remplacer les machines obsolètes et acheter du nouveau capital.

2.5 Application du modèle à générations imbriquées au choix d'un système de retraite

Jusqu'à présent, nous avons envisagé le système de retraite comme un système de capitalisation où l'Etat n'intervient pas. Toutefois, l'ensemble des pays riches ont mis en place un système de retraite de façon à permettre de protéger les individus contre leur myopie en les obligeant à cotiser.

2.5.1 Typologie des systèmes de retraite

La typologie des systèmes de retraite est la suivante : i) régimes obligatoires publics, ii) régimes obligatoires privés, iii) régimes facultatifs. Le premier pilier est soit d'essence beveridgienne, soit d'essence bismarckienne. Dans le premier cas, le financement des pensions est assuré par le budget de l'Etat et les prestations sont forfaitaires (NZL, ISL, AUS,GBR,SWE,FIN,DNK,NDL).

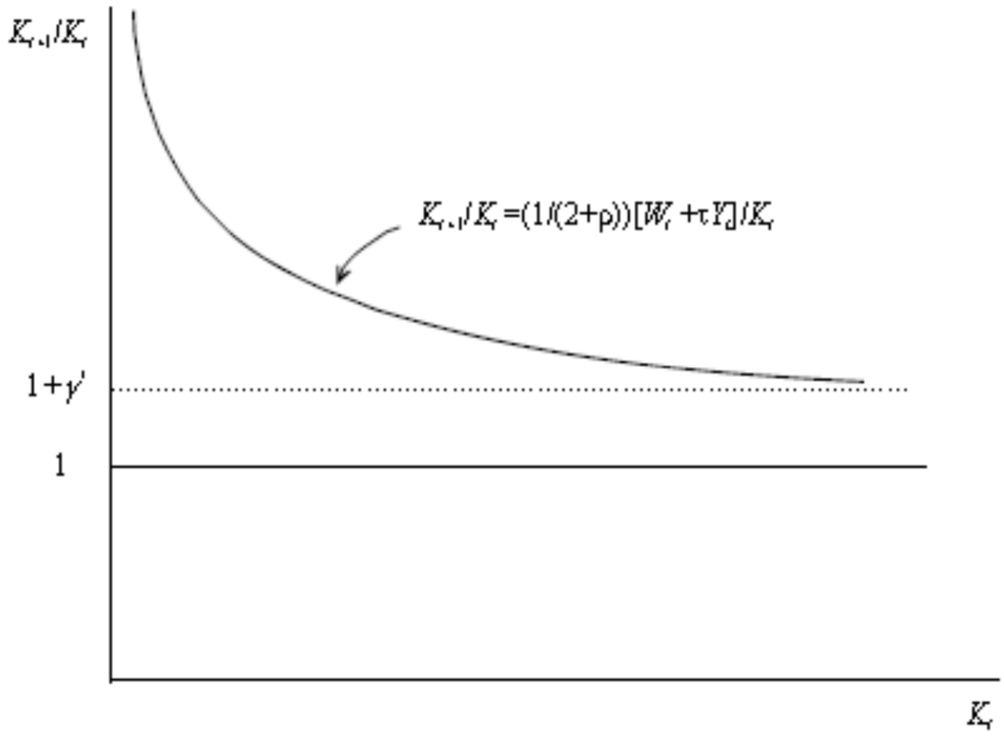

FIG. 2.15 – Croissance endogène dans un modèle à générations imbriquées - Source : Chapitre 17, Heijdra, Reijnders, and Romp (2009) Foundations of Modern Macroeconomics Second Edition. Exercise and Solutions Manual. Oxford University Press.

Le premier pilier peut être également d'essence bismarckienne et fonctionne en répartition (pay-as-you-go) : les droits de pension dépendent des cotisations prélevées sur les revenus du travail et les pensions d'une année sont financées par les cotisations prélevées la même année. Le deuxième pilier regroupe les régimes professionnels complémentaires qui sont soit obligatoires, soit facultatifs. Dans la plupart des pays, ce pilier repose sur la capitalisation : les droits à pension sont fonction d'une épargne accumulée lors de la période professionnelle. Les régimes sont préfinancés (funded) : les contributions aux régimes sont capitalisées et reversées aux assurés. Le troisième pilier est constitué d'une épargne de retraite individuelle facultative et fonctionne par capitalisation.

Différences entre pays anglo-saxons et pays scandinaves d'une part et pays européens continentaux d'autre part : i) système par répartition plus une composante importante de capitalisation pour les premiers, ii) forte composante de répartition et incitation croissante à la capitalisation pour les seconds. En Suède, instauration d'un régime mixte de répartition et de capitalisation.

Pour modéliser un système de retraite, on élargit le modèle à générations imbriquées de Diamond-Samuelson en supposant que le gouvernement effectue un transfert forfaitaire Z_{t+1} aux individus âgés et prélève un impôt forfaitaire T_t sur les revenus des individus jeunes. Les contraintes budgétaires (2.52a) et (2.52b) se modifient de la façon suivante :

$$C_t^Y + S_t = W_t - T_t, \tag{2.137a}$$

$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})\, S_t + Z_{t+1}. \tag{2.137b}$$

En utilisant (2.137b) pour éliminer l'épargne de (2.137a), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t - T_t + \frac{Z_{t+1}}{1+r_{t+1}}. \tag{2.138}$$

Le terme de droite représente les revenus après-impôt des travailleurs plus les pensions de retraite versées aux individus âgés et exprimés en valeur présente.

On peut distinguer deux types de système de retraite. Dans le système par capitalisation, le gouvernement investit les contributions au système de retraite des travailleurs jeunes et leur fournit la somme plus les intérêts à la période suivante (30 ans après) une fois qu'ils sont plus âgés. Dans un tel système, les pensions de retraite de demain sont les contributions T_t d'aujourd'hui plus les intérêts :

$$Z_{t+1} = (1+r_{t+1})\, T_t. \tag{2.139}$$

De manière différente, le système par répartition (PAYG : pay as you go), les pensions de retraite des individus âgés sont financées par les impôts forfaitaires des travailleurs jeunes à la même période. Puisqu'à la date t, il y a L_{t-1} individus âgés recevant une pension Z_t, et L_t travailleurs jeunes (payant des impôts forfaitaires T_t), un système par répartition implique $L_{t-1}Z_t = L_t T_t$ ce qui peut être réécrit de la façon suivante en utilisant le fait que $L_t/L_{t-1} = (1+n)$:

$$Z_t = T_t\,(1+n)\,. \tag{2.140}$$

2.5.2 Système de retraite par capitalisation (fully-funded)

Une propriété importante du système de retraite par capitalisation est sa neutralité. Par neutralité, on signifie que l'allocation des ressources est identique à celle obtenue en l'absence d'un système de retraite. L'existence de cette neutralité peut être démontrée de manière intuitive en substituant (2.139) dans la contrainte budgétaire intertemporelle (2.138) :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t. \tag{2.141}$$

La première étape consiste à noter que la contrainte budgétaire intertemporelle est identique à celle considérée en l'absence d'un système de retraite. Par conséquent, les choix de consommation $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t$ et C_{t+1}^O sont identiques, cad déterminés par (2.55), puisque la contrainte budgétaire intertemporelle n'est pas modifiée. En revanche, l'épargne est très légèrement modifiée. Dans un système avec capitalisation, en faisant passer l'impôt forfaitaire (c'est-à-dire les cotisations) à gauche, l'épargne est égale à :

$$S_t = W_t - T_t - C_t^Y, \quad S_t + T_t = \frac{W_t}{2+\rho},$$

où on a utilisé le fait que $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t$. Finalement, d'après l'expression ci-dessus, l'épargne plus l'impôt dans un système de retraite avec capitalisation correspond à la fonction d'épargne par décrite par (2.56) :

$$S_t + T_t = S\,(W_t, r_{t+1})\,. \tag{2.142}$$

Dans une deuxième étape, il faut déterminer une relation entre l'épargne des travailleurs jeunes et le capital destiné à la production à la période suivante :

$$Y_t = L_{t-1} C_t^O + L_t C_t^Y + I_t.$$

La consommation des retraités nés à la date $t-1$ dépend de l'épargne forcée $L_{t-1} .T_{t-1}$ et de l'épargne complémentaire $L_{t-1} .S_{t-1}$. Un des aspects clefs du système par capitalisation est que le gouvernement place les recettes fiscales T_{t-1} versées par les travailleurs jeunes àa la date $t-1$ sur le marché des capitaux. En d'autre termes, les recettes fiscales $L_{t-1}T_{t-1}$ de la période précédente $t-1$ servent à financer les retraites des individus âgés à la date t $L_{t-1}Z_t = (1+r_t) L_{t-1}T_{t-1} = (1+r_t) K_t^G$ en leur fournissant le rendement du capital (ce rendement étant payé par les firmes qui louent le capital à l'Etat). Finalement, la mise en place d'un système de capitalisation consiste à 'contraindre' les ménages à cotiser pour leurs retraites un montant T_t. Le reste $W_t - T_t - C_t = S_t$ est épargné et constitue un complèment à la retraite versée par l'Etat, cette épargne privée servant à financer l'autre partie du capital utilisé par les firmes. En résumé, le capital peut être scindé en deux composantes :

$$K_t = K_t^H + K_t^G, \tag{2.143}$$

où K_t^H est le capital détenu par les ménages âgés et le capital K_t^G est celui détenu par le gouvernement qui est intégralement reversé aux travailleurs âgés. La consommation des plus âgés à la date t est donc : $L_{t-1}C_t^O = (r_t + \delta) K_t^H + (1-\delta) K_t^H + L_{t-1}Z_t$. En utilisant le fait que $K_t^H = K_t - K_t^G$, les ressources des retraités sont égales à :

$$\begin{aligned} & (r_t + \delta) K_t + (1-\delta) K_t - (1+r_t) K_t^G + L_{t-1}Z_t, \\ = \quad & (r_t + \delta) K_t + (1-\delta) K_t, \end{aligned}$$

où on utilise le fait que $L_{t-1}Z_t = (1+r_t) L_{t-1}T_{t-1} = (1+r_t) K_t^G$. On obtient le même niveau de consommation des plus âgés qu'en l'absence de système de retraite ; la différence est qu'une partie de l'épargne est obligatoire.

L'équilibre sur le marché des biens et services est décrit par (2.64) mais l'équation d'épargne (2.67) est légèrement modifiée puisque maintenant l'épargne totale est $L_t (S_t + T_t)$:

$$L_t (S_t + T_t) = (1-\delta) K_t + I_t. \tag{2.144}$$

En combinant (2.64), (2.142), (2.144), on retrouve l'équilibre sur le marché des capitaux :

$$L_t (S_t + T_t) = L_t S (W_t, r_{t+1}) = K_{t+1}. \tag{2.145}$$

2.5.3 Système de retraite par répartition (PAYG)

Modèle général

Dans un système par répartition, il existe un transfert décrit par (2.140) de telle sorte que les impôts des travailleurs jeunes à la date t financent les retraites des individus âgés à la date t, donc à la même période. En supposant que l'impôt forfaitaire est identique, alors $T_{t+1} = T_t = T$; ce qui implique que l'équilibre budgétaire du système de retraite (2.140) peut être réécrit de la façon suivante $Z_{t+1} = (1+n) T$. En substituant la contrainte de budget équilibré dans la contrainte budgétaire intertemporelle (2.138), on obtient :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t - \frac{(r_{t+1} - n)}{1+r_{t+1}} T \equiv \hat{W}_t. \tag{2.146}$$

Cette expression montre qu'à la différence du système de capitalisation, le système de répartition peut contracter la frontière des possibilités de consommation des travailleurs jeunes lorsque le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance de la population n. Dit autrement, lorsque $r_{t+1} > n$, la contribution au système de retraite est perçue comme un impôt forfaitaire pesant sur les travailleurs jeunes. La raison est la suivante. D'un côté, les travailleurs jeunes anticipent une pension de retraite qui sera versée dans 30 ans par la nouvelle génération équivalente à $(1+n)T$ ce qui exprimée en valeur présente est égale à $\frac{(1+n)T}{1+r_{t+1}}$. D'un autre côté, il paie pour les retraites aujourd'hui un montant équivalent à T. Si le taux d'intérêt et le taux de croissance de la population coïncide, le système sera neutre.

Le ménage représentatif maximise son utilité intertemporelle (2.51) sous la nouvelle contrainte budgétaire intertemporelle (2.146). On suppose que l'utilité est logarithmique, cad $U\left(C^j\right) = \ln C^j$ avec $j = Y, O$. Dans ce cas particulier, les consommations lorsque l'individu est jeune puis plus âgé sont données par :

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}\hat{W}_t, \quad C_{t+1}^O = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}\hat{W}_t. \tag{2.147}$$

L'épargne est obtenue en utilisant (2.137a) qui implique que $S_t = W_t - T_t - C_t^Y$. En substituant (2.147), cad $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}\hat{W}_t$, et en utilisant la définition de $\hat{W}_t$ donnée par (2.146), on obtient une nouvelle fonction d'épargne :

$$\begin{aligned} S_t &= W_t - T - \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\left[W_t - T + \frac{(1+n)T}{1+r_{t+1}}\right], \\ &= \frac{W_t}{2+\rho} - \left[\frac{1}{2+\rho} + \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\right)\right]T, \\ &\equiv S\left(W_t, r_{t+1}, T\right). \end{aligned} \tag{2.148}$$

De la même façon que précédemment (c'est-à-dire sans système de retraite), on obtient une propension à épargner le salaire positive mais inférieure à 1, $0 < S_W < 1$; bien que l'élasticité de substitution intertemporelle soit égale à 1, l'épargne croît avec le taux d'intérêt, $S_r > 0$ car une hausse du taux d'intérêt réduit la valeur présente des pensions de retraite $\frac{T}{1+r}$ ce qui incite l'individu à réduire sa consommation (car il est moins riche) et à épargner (ou l'effet substitution l'emporte sur la somme de l'effet revenu, ce dernier étant atténué par la baisse en valeur présente des revenus futurs) ; l'effet richesse négatif réduit la consommation à la première période et donc élève l'épargne. Une hausse de l'impôt forfaitre diminue l'épargne en réduisant le revenu disponible. Lorsque $r_{t+1} = n$, de la même façon que nous l'avons démontré avec l'équivalence ricardienne, une hausse de l'impôt forfaitaire laisse inchangée la consommation présente et donc l'épargne baisse du même montant que la hausse de l'impôt.

Comme le système par répartition est un système qui transfert des ressources des jeunes vers les plus âgés à la même date, l'épargne totale reste inchangée et est donnée par (2.67). Pour le voir, il faut écrire la consommation des plus âgés et des plus jeunes à la même date t. La consommation des plus âgés est égale à $L_{t-1}C_t^O = (r_t + \delta)K_t + (1-\delta)K_t + L_t T$ en utilisant le fait que $L_{t-1}Z_t = L_t T$, et la consommation des plus jeunes est égale à $C_t^Y = L_t\left(W_t - S_t - T\right)$. En sommant les consomation des plus jeunes et des plus âgés, on obtient (2.67). En combinant cette relation avec l'équilibre sur le marché des biens et services, on trouve que l'épargne par travailleur est égale au capital par travailleur à la période suivante :

$$S\left(W_t, r_{t+1}, T\right) = (1+n)k_{t+1}. \tag{2.149}$$

En utilisant une fonction de production de type Cobb-Douglas $y_t \equiv k_t^{1-\epsilon_L}$, le taux de rendement du capital net de la dépréciation est égale à $r_{t+1} = (1-\epsilon_L)k_{t+1}^{-\epsilon_L}$ puis en utilisant le fait que $W_t = y_t - (r_t + \delta)k_t$, le salaire est égal à $\epsilon_L k_t^{1-\epsilon_L}$. En substituant les prix des facteurs de production $W_t = W(k_t)$ et $r_{t+1} = r(k_{t+1})$ dans la fonction d'épargne, on obtient :

$$S[W(k_t), r(k_{t+1}), T] = (1+n)\, k_{t+1}. \tag{2.150}$$

La différentielle totale de l'équilibre sur le marché des capitaux s'écrit :

$$S_W W'(k_t)\, dk_t + S_r r'(k_{t+1})\, dk_{t+1} + S_T dT = (1+n)\, dk_{t+1}.$$

En isolant la variation du capital à la date $t+1$, on obtient une relation entre la variation du capital de demain et celui d'aujourd'hui,

$$k_{t+1} = g(k_t, T), \tag{2.151}$$

où les dérivées partielles sont données par :

$$g_k \equiv \frac{\partial g}{\partial k_t} = \frac{S_W W'}{1+n-r'} > 0, \quad g_T \equiv \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{S_T}{1+n-r'} < 0, \tag{2.152}$$

où $S_W > 0$ et $S_T < 0$ d'après (2.148). De la même façon qu'antérieurement, la stabilité de la dynamique repose sur $|g_k| < 1$. Pour le comprendre, différentions l'équilibre sur le marché des capitaux : $S_W W' dk_t + r' dk_{t+1} = (1+n)\, dk_{t+1}$. Le terme de gauche représente l'accroissement de l'épargne qui provient de l'accroissement du salaire compensé par l'effet négatif engendré par la baisse du taux d'intérêt car les ménages anticipent qu'un accroissement de l'épargne délève le capital par travailleur ce qui réduit le rendement du capital (et donc l'épargne puisque $S_r > 0$). La condition de stabilité implique que l'effet positif provenant d'une hausse du capital sur l'épargne qui est le résultat de deux effets (hausse du salaire atténué par la baisse du taux d'intérêt) ne soit pas trop élevé (moins élevé que $1+n$).

Modèle simplifié : $r_{t+1} = n$

En supposant que le taux d'intérêt est égal au taux de croissance de la population, on retrouve la même contrainte budgétaire intertemporelle que celle dans un système de capitalisation :

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t. \tag{2.153}$$

Par conséquent, les choix de consommation $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t$ et C_{t+1}^O sont identiques à (2.55) puisque la contrainte budgétaire intertemporelle est identique. En revanche, l'épargne est très légèrement modifiée. Dans un système par répartition, l'épargne est égale à la part du revenu disponible qui n'est pas consommée :

$$S_t = W_t - T - C_t^Y, \quad S_t = \frac{W_t}{2+\rho} - T, \tag{2.154}$$

où on a utilisé le fait que $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t$. Finalement, d'après l'expression ci-dessus, l'épargne

$$S_t = S(W_t, T). \tag{2.155}$$

Bien que l'épargne (2.154) ressemble à celle obtenue dans un système par capitalisation (2.142), la fonction d'épargne décrite par (2.155) est différente car l'impôt forfaitaire ne finance pas l'accumulation de capital (elle ne constitue pas une épargne forcée mais une cotisation) mais les retraites des individus nés en $t-1$.

Pour le voir, il faut déterminer l'équilibre sur le marché des capitaux en utilisant le fait que $L_t T = L_{t-1} Z$:

$$L_t \times S_t = L_t \times S(W_t, T) = K_{t+1}, \tag{2.156}$$

ou encore en utilisant $\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)$,

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{S(W_t, T)}{1+n}, \\ &= \frac{W_t}{(1+n)(2+\rho)} - \frac{T}{1+n}. \end{aligned} \tag{2.157}$$

L'équilibre sur le marché des capitaux est bien différent dans un système par répartition par rapport à celui dans un système par capitalisation décrit par (2.145). La différence majeure est la suivante. Dans un système par capitalisation, l'impôt $L_t T$ est investi en capital K_t^G par l'Etat, cet investissement s'ajoutant à l'investissement provenant de l'épargne privée K_t^H. En revanche, dans un système par répartition, l'impôt forfaitaire réduit le revenu disponible et donc l'épargne, mais n'est pas investie en capital : ce revenu sert à financer les retraites ce qui réduit d'autant le capital par travailleur.

En utilisant le fait que $W_t = W(k_t)$, et en différentiant (2.156), on obtient la variation du capital par travailleur futur k_{t+1} en termes du capital par travailleur courant k_t, et également de l'impôt forfaitaire :

$$dk_{t+1} = \frac{W'}{(1+n)(2+\rho)} dk_t - \frac{dT}{1+n}. \tag{2.158}$$

Cette relation montre que la présence d'un impôt forfaitaire déplace la courbe d'épargne vers le bas.

Représentation graphique

Sur la Figure 2.16, nous illustrons la différence fondamentale entre un système sans retraite par répartition qui est indiquée par la courbe en pointillés et un système avec retraite par répartition montrée par la courbe en trait plein. La courbe en pointillés est la courbe pour laquelle l'impôt forfaitaire est nul, cad $T = 0$, et $k_{t+1} = g(k_t, 0)$. Le point B est le point vers lequel convergerait une économie sans système de retraite par répartition. Supposons qu'un système de retraite par répartition soit introduit à la date $t = 0$ lorsque l'économie est à l'état-staionnaire (initial) dotée d'une stock de capital par travailleur k_0. La génération des plus âgés à la date $t = 0$ est plutôt chanceuse car elle n'a pas contribué au système de retraite et pourtant elle reçoit des pensions de retraite d'un montant $Z = (1+n) T$. La consommation à la date t d'un retraité est $C_t^O = (1 + r_t) S_{t-1} + Z_t$ avec $L_{t-1} S_{t-1} = K_t$ ce qui permet de réécrire la consommation $L_{t-1} C_t^O = (1 + r_t) K_t + (1+n) L_{t-1} T$. La consommation totale des plus âgés est $L_{t-1} C_t^O = \frac{L_t}{1+n} C_t^O$ ce qui permet de déterminer la consommation des plus âgés à la date t en notant $k_t = K_t / L_t$: $C_t^O = (1+n)[(1+r_t) k_t + T]$. En se plaçant à la date $t = 0$ lorsque le système de retraite par répartition est mis en place, et puisque ces pensions de retraite sont intégralement dépensées, la consommation des individus âgées est égale à :

$$C_0^O = (1+n)[(1 + r(k_0)) k_0 + T], \quad \frac{dC_0^O}{dT} = (1+n) > 0, \tag{2.159}$$

où nous avons utilisé le fait que k_0 est prédéterminé ce qui implique que $dr(k_0) = 0$. Les travailleurs jeunes doivent payer les pensions T des plus âgés et recevront des pensions à la période suivante équivalentes à $(1+n) T$. En utilisant le fait que le salaire est prédéterminé au niveau $W(k_0)$, la variation de la richesse nette $\hat{W}$ des travailleurs jeunes à la date $t = 0$ est ambigue :

$$\frac{\partial \hat{W}_0}{\partial T} = -\frac{r(k_1) - n}{1 + r(k_1)} \lesseqgtr 0. \tag{2.160}$$

Si $r = n$, alors l'effet sera neutre sur la consommation des travailleurs jeunes.

Ce qui est plus intéressant, c'est d'étudier l'effet sur le stock de capital par travailleur de l'économie qui détermine le PIB par habitant puisque $y_t = (k_t)^{1-\epsilon_L}$. D'après (2.152), la hausse de T diminue l'épargne S_0 et donc réduit le stock de capital à la période suivante : $dk_1/dT = g_T < 0$. Cet effet négatif est représenté sur la Figure 2.16 par le segment AC. En termes de l'équation (2.158), la variation du capital par travailleur est donnée par :

$$\begin{aligned} dk_1 &= \frac{W'}{(1+n)(2+\rho)} .dk_0 - \frac{dT}{1+n}, \\ &= -\frac{dT}{1+n}. \end{aligned} \tag{2.161}$$

Cette relation montre que la présence d'un impôt forfaitaire déplace la courbe d'épargne vers le bas.

Le nouvel état-stationnaire est associé à un stock de capital par travailleur moins élevé avec un système de retraite par répartition. La raison est que l'accumulation de capital est moins importante le long de la trajectoire convergente car comme le salaire de chaque nouvelle période est moins élevé, l'épargne et donc l'investissement sont moins forts. Comme le salaire est croissant avec le stock de capital et le taux d'intérêt décroissant, le salaire est moins élevé et le taux d'intérêt plus important. Comme à long terme $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$, en différentiant la fonction d'épargne, on obtient $g_k \ .d\tilde{k} + g_T dT = d\tilde{k}$ et en isolant la variation du stock de capital par travailleur à long terme, on trouve que la cotisation au système de retraite réduit $\tilde{k}$:

$$\frac{d\tilde{k}}{dT} = \frac{g_T}{1 - g_k} < 0, \tag{2.162}$$

où $0 < g_k < 1$ qui est nécessaire pour assurer la convergence vers l'équilibre de long terme.

En termes de l'équation (2.158), la variation du capital par travailleur à long terme est donnée par :

$$\begin{aligned} d\tilde{k} \times \left[1 - \frac{W'}{(1+n)(2+\rho)}\right] &= -\frac{dT}{1+n}, \\ d\tilde{k} &= -\frac{1}{\left[1 - \frac{W'}{(1+n)(2+\rho)}\right]} \frac{dT}{1+n} < 0. \end{aligned} \tag{2.163}$$

où $0 < g_k = \frac{W'}{(1+n)(2+\rho)} < 1$. Cette relation montre que la présence d'un impôt forfaitaire déplace la courbe d'épargne vers le bas.

Finalement, à la différence d'un système par capitalisation, un système de retraite par répartition aboutit à une éviction du stock de capital, une baisse du salaire et une hausse du taux d'intérêt à long terme en produisant un effet multiplicateur d'épargne négatif : comme l'épargne diminue initialement, le stock de capital à la période suivante est moins élevé, ce qui atténue l'augmentation du salaire et donc l'accroissement de l'épargne, et à nouveau le capital augmente moins. Une baisse initiale de l'épargne se répercute à chaque période car elle réduit la hausse du stock de capital ce qui implique des accroissements de salaires moindres aux différentes périodes.

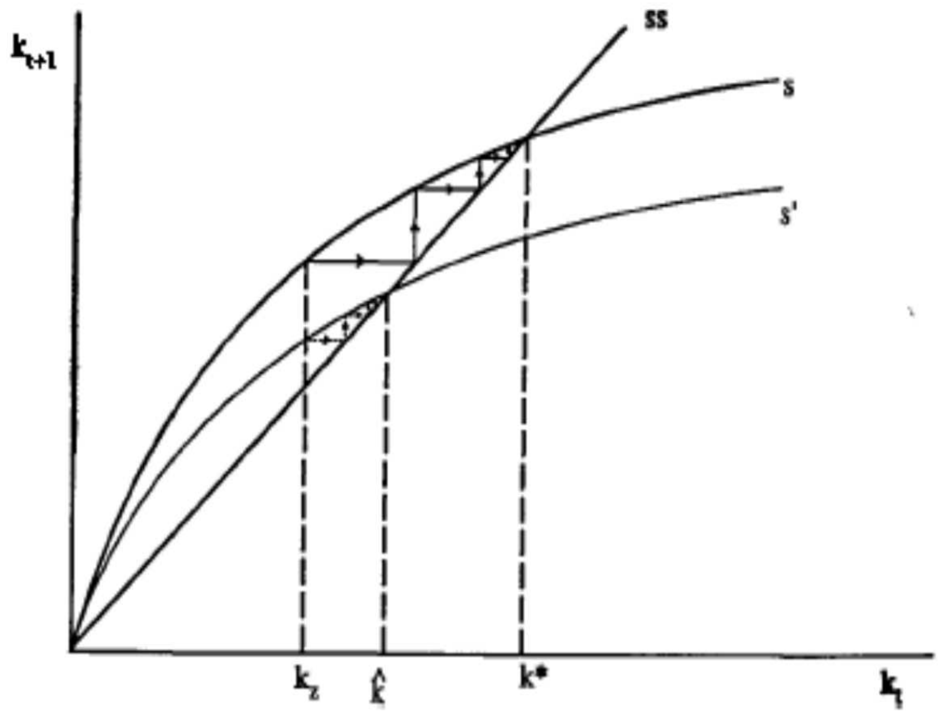

FIG. 2.16 – Modèle à générations imbriquées Diamond-Samuelson et système de retraite par répartition (PAYG) : la diminution du stock de capital par travailleur à long terme - Source : Blanchard and Fisher (1989) Lectures on Macroeconomics. MIT Press. Chapter 3.

2.6 Le modèle d'équilibre général à deux périodes avec offre de travail élastique : une introduction au modèle du cycle réel

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré que l'offre de travail était inélastique. Nous allons relâcher cette hypothèse pour étudier l'effet d'une hausse temporaire i) des dépenses publiques et ii) de la productivité. A cette fin, on considère le modèle à deux périodes développé dans la section (2.2) mais en l'élargissant de deux façons : i) d'abord en introduisant l'offre de travail, et ii) en considérant l'accumulation de capital physique.

2.6.1 Les ménages

On considère que l'économie est composée d'un grand nombre de ménages dont le nombre est normalisé à 1. Tous les ménages sont identiques et donc leurs décisions sont résumées par celles de l'agent représentatif ; évidemment dans la réalité, les décisions représentent celles de l'individu moyen.

L'agent représentatif débute la période 1 avec un stock d'actif égal à A_0 ; il offre une quantité de travail L_1 et chaque heure de travail est rémunérée au taux W_1. Le revenu obtenu est donc égal à $W_1 \times L_1$ dont il consomme une partie et accumule une richesse d'un montant égal à $A_1 - A_0$. Lors de la période 2, l'individu obtient un revenu $R_2 A_1$ avec $R_2 = (1 + r_2)$ du fait de la détention d'un stock d'actifs A_1. Au cours de la période 2, l'individu obtient également un revenu $W_2 L_2$ du fait de l'offre de L_2 heures de travail où W_2 est le taux de salaire