Cours de Olivier Cardi
Université de Tours
M1
Cours d'Économie Avancée
Année universitaire 2016-2017

TD 4 : Choix intertemporels dans un modèle à horizon infini

1 Le modèle de Ramsey et le comportement d'épargne

On considère une économie fermée composée d'un grand nombre de ménages identiques, dotés de prévisions parfaites et ayant un horizon de vie infini. La taille initiale de chaque ménage est normalisée à 1 et croît au rythme n. On note $C(t)$ la consommation agrégée et $c(t) \equiv C(t)/L(t)$ la consommation par individu à la date t. Chaque individu offre une unité de travail de manière inélastique et tire une satisfaction de sa consommation $u(c(t))$ où l'utilité instantanée est croissante et concave et décrite par:

$$u\left(c(t)\right) = \frac{c(t)^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}, \quad \sigma > 0. \tag{1}$$

En supposant que l'individu se comporte de manière altruiste vis-à-vis de ses descendants, la fonction objectif de chaque ménage s'écrit de la façon suivante:

$$\int_0^\infty u\left(c(t)\right) e^{-(\rho-n)t} dt, \tag{2}$$

où ρ est le taux de préférence pour le présent avec $\rho > n$. La population totale détient un stock de richesse financière $A(t)$ qui rapporte un taux d'intérêt $r(t)$, et obtient un taux de salaire $W(t)$ en contrepartie de l'offre d'une unité de travail. L'Etat prélève un montant total $T(t)$ d'impôt forfaitaire.

L'économie est également composée d'un grand nombre de firmes en concurrence parfaite sur le marché des produits et des facteurs de production. La firme représentative produit une quantité $Y(t)$ de bien final à l'aide de travail $L(t)$ et de capital $K(t)$:

$$Y(t) = F\left(K(t), Z(t)L(t)\right) = \left(K(t)\right)^{\alpha} \left(Z(t)L(t)\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

où $Z(t)$ est la productivité du travail qui s'élève au rythme z. Pour élever le stock de capital et remplacer le capital qui se déprécie au taux δ_K, la firme représentative investit un montant $I(t)$. L'équation d'accumulation du capital est décrite par:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta_K K(t). \tag{4}$$

Le bien final est le numéraire de telle sorte que son prix noté $P(t)$ est normalisé à 1.

1.1 La résolution du modèle

1. Dites ce que représente σ dans la fonction d'utilité (1). En utilisant la règle de l'Hôpital, montrez que la fonction d'utilité à élasticité de substitution constante (1) converge vers une utilité logarithmique lorsque σ tend vers 1.
2. On note $a(t) \equiv A(t)/L(t)$ le stock de richesse financière par habitant et $t(t) = T(t)/L(t)$ l'impôt forfaitaire individuel. Ecrivez l'équation d'accumulation de la richesse financière au niveau agrégé puis individuel.
3. Ecrivez la condition d'absence de jeu à la Ponzi puis déterminez la contrainte budgétaire compatible avec la condition de solvabilité intertemporelle.
4. Ecrivez le Hamiltonien $\mathcal{H}$ en valeur courante et donnez les conditions d'optimalité statique et dynamique, ainsi que la condition de transversalité.
5. Déterminez l'équation dynamique de la consommation individuelle.
6. Montrez que le problème d'optimisation intertemporelle de la firme peut être réduit à un problème d'optimisation statique. Puis déterminez les demandes de travail et de capital.
7. On note $\hat{k} = \frac{K}{ZL}$ et $y = \frac{Y}{ZL}$ le capital et la production par travailleur efficace avec $\hat{L} = ZL$. Réécrivez les demandes de travail et de capital en termes de travail efficace.
8. Ecrivez l'équation d'équilibre du marché des biens et services en utilisant la contrainte budgétaire agrégée du ménage représentatif avec $A(t) = K(t)$ et $G(t) = T(t)$. Montrez que l'équation d'accumulation du stock de capital par travailleur efficace s'écrit de la façon suivante:
$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - \hat{c} - (z + n + \delta_K)\,\hat{k} - \hat{g}. \tag{5}$$
9. Montrez que l'équation dynamique de la consommation par travailleur efficace s'écrit:
$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \sigma\left[f_k\left(\hat{k}\right) - \delta_K - \rho - \frac{z}{\sigma}\right]. \tag{6}$$
10. Réécrivez la condition de transversalité en termes de capital par travailleur efficace.
11. Ecrivez l'équilibre de long terme (en termes de travail efficace) en notant les valeurs à l'état-stationnaire $\tilde{x}$ avec $x = c,k$; tracez les isoclines dans le plan $(\ln \hat{k}, \ln \hat{c})$.

12. Linéarisez le système dynamique puis déterminez le sentier stable en supposant $\hat{g} = 0$. Caractérisez de manière graphique dans le plan $(\ln \hat{k}, \ln \hat{c})$ le comportement du système dynamique.

1.2 L'effet d'un choc technologique temporaire sur l'investissement et le taux d'épargne

On s'intéresse au comportement d'investissement et à la réaction du taux d'épargne dans le modèle de Ramsey. Pour simplifier, on suppose l'absence d'Etat; on pose donc $G(t) = T(t) = 0$.

1. En utilisant le fait que l'épargne est égale à l'investissement, montrez que le taux d'épargne est égal à:
$$s(t) = 1 - \frac{\hat{c}(t)}{\hat{y}(t)}. \tag{7}$$
2. Montrez que le taux d'épargne à long terme noté $\tilde{s}$ est décrit par:
$$\tilde{s} = \frac{(z + n + \delta_K)\,\alpha}{\left(\delta_K + \rho + \frac{z}{\sigma}\right)}. \tag{8}$$
3. On pose $\sigma = 1$. Comment varie le taux d'épargne de long terme, $\tilde{s}$, avec le progrès technique z, la croissance de la population et le taux de dépréciation du capital physique δ_K ?
4. Pour simplifier les calculs et l'exposé, on suppose l'absence de croissance tendantielle de la productivité ($z = 0$). Les variables exprimées par travailleur sont notées en lettre minuscule. La déviation d'une variable par rapport à son niveau de long terme exprimée en pourcentage est notée avec un chapeau ($\hat{x} = \frac{x(t)-\tilde{x}}{\tilde{x}}$).
   (a) En notant $B = Z^{1-\alpha}$ la productivité globale des facteurs, vérifiez que la fonction de production par travailleur s'écrit maintenant:
$$y = B\,.\,(k)^{\alpha}\,. \tag{9}$$
   Déterminez à nouveau les conditions du premier ordre de la firme représentative. Vérifiez que les équations d'accumulation du capital par travailleur et l'équation dynamique de la consommation par travailleur s'écrivent maintenant:
$$\dot{k} = B\,.f\,(k) - c - (n + \delta_K)\ .k, \tag{10a}$$
$$\dot{c} = c\,.\sigma\,.\left(B\,.f_k\,(k) - \delta_K - \rho\right). \tag{10b}$$

(b) Linéarisez le système dynamique (10) au voisinage de l'équilibre de long terme. Déterminez les vecteurs propres et les valeurs propres. On suppose que le choc technologique suit l'équation dynamique suivante:

$$\hat{B}(t) = b \, .e^{-\xi t}. \tag{11}$$

Déterminez les solutions générales du capital et de la consommation par travailleur en appliquant la méthode de Buiter (1984; Econometrica).

(c) Tracez les deux isoclines $\dot{\hat{k}}(t) = 0$ et $\dot{\hat{c}}(t) = 0$ ainsi que le sentier stable dans le plan $(\ln k(t), \ln c(t))$. Montrez de manière graphique l'effet d'un choc technologique permanent.

(d) Déterminez les réponses initiales de la consommation et de l'investissement à la suite d'un choc technologique temporaire en utilisant les solutions générales que vous avez déterminées précédemment. Expliquez pourquoi la réaction à court terme de l'investissement varie en sens inverse du degré de persistance du choc technologique.

(e) Représentez de manière graphique l'ajustement de la consommation et du stock de capital par travailleur à la suite d'un choc technologique temporaire.

(f) En linéarisant le taux d'épargne $s(t) = 1 - \frac{c(t)}{y(t)}$ au voisinage de l'état-stationnaire puis en évaluant l'expression à la date $t = 0$, précisez les trois effets qui influencent s; expliquez la raison pour laquelle le taux d'épargne tend à augmenter davantage après un choc technologique temporaire qu'après un choc technologique permanent.