Cours de Olivier Cardi
Université de Tours
M1
Cours d'Économie Avancée
Année universitaire 2016-2017
Eléments de correction

TD 1 : Décisions intertemporelles dans le modèle à deux périodes et à générations imbriquées

1 Choix d'épargne dans un modèle à deux périodes

On considère un consommateur qui vit deux périodes notées 1 et 2. Il dispose d'un revenu R_1 à la première période et d'un revenu anticipé R_2^a à la deuxième période. Etant donné le prix à la première période P_1 et le prix anticipé P_2^a à la deuxième période, l'agent doit décider de la répartition entre consommation présente C_1 et épargne E. A la deuxième période, l'agent économique dispose d'une revenu anticipé R_2^a et du montant de l'épargne accumulé lors de la période précédente plus les intérêts, et consomme une quantité de biens C_2. L'agent économique tire une satisfaction $U(C_1,C_2)$ de sa consommation à la première et à la deuxième période. On suppose enfin que l'agent économique peut prêter ou emprunter autant qu'il le souhaite au taux d'intérêt nominal i.

1. Ecrire les équations budgétaires pour la période 1 et la période 2 (anticipée).

   Réponse: Les contraintes budgétaires aux périodes 1 et 2 s'écrivent de la manière suivante (on suppose que le prix à la consommation est égal au prix de la production, cad au déflateur du revenu):

$$P_1C_1 + P_1E = P_1R_1, \quad P_2^aC_2 = P_2^aR_2^a + P_1E\,(1+i)\,. \tag{1}$$

2. Déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle en valeur nominale. En notant π_2^a le taux d'inflation d'anticipé, r le taux le taux d'intérêt réel, et W la richesse réelle, montrez que la contrainte budgétaire intertemporelle peut être réécrite sous la forme suivante:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = R_1 + \frac{R_2^a}{1+r}. \tag{2}$$

Réponse : En substituant l'épargne $P_1E = \frac{P_2^a C_2 - P_2^a R_2^a}{1+i}$ dans la première contrainte budgétaire, on obtient une unique contrainte budgétaire appelée contrainte budgétaire intertemporelle :

$$P_1C_1 + \frac{P_2^a C_2}{1+i} = P_1R_1 + \frac{P_2^a R_2^a}{1+i}. \tag{3}$$

En notant π_2^a le taux d'inflation anticipée, le prix anticipé P_2^a est égal au prix P_1 fois un facteur qui indique dans quelle proportion se sont accrus les prix : $P_2^a = P_1 \left(1+\pi_2^a\right)$. Le rapport $\frac{1+i}{1+\pi_2^a}$ représente le taux d'accroissement de la richesse en termes réels. Ce rapport indique dans quelle proportion la richesse réelle augmente lorsque l'on détient 1 bien à la période initiale. La variable qui permet d'évaluer cette richesse supplémentaire est le **taux d'intérêt réel**. En d'autres termes, 1 bien aujourd'hui rapporte $1+r = \frac{1+i}{1+\pi_2^a}$ biens. Et 1 bien demain vaut $\frac{1}{1+r} = \frac{1+\pi_2^a}{1+i}$ biens aujourd'hui. Le terme $\frac{1}{1+r}$ est le facteur d'actualisation exprimé en termes réels. Nous pouvons finalement réécrire l'expression de la manière suivante :

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = R_1 + \frac{R_2^a}{1+r}. \tag{4}$$

D'après (4), la somme actualisée des dépenses en biens de consommation doit être égale à la somme actualisée des revenus. On pose $W \equiv R_1 + \frac{R_2^a}{1+r}$ la richesse réelle actualisée qui est égale à la somme actualisée des revenus.

3. Ecrivez le programme de maximisation du consommateur en éliminant C_2 de l'utilité intertemporelle $U\left(C_1,C_2\right)$ en utilisant (2). Déterminez la condition du premier ordre. Interprétez en indiquant ce que représentent les termes U_1'/U_2' et $(1+r)$. Tracez la courbe d'indifférence et la contrainte budgétaire (2) sur un graphique dans le plan (C_1,C_2) et montrez le point choisi par le consommateur.

   Réponse : Le consommateur choisit de répartir sa richesse réelle entre consommation présente et consommation future cours de façon à atteindre le plus haut niveau d'utilité $U\left(C_1,C_2\right)$ étant donné la contrainte budgétaire intertemporelle. Déterminons la répartition de la somme des revenus actualisés entre consommation présente et consommation future :

$$\max_{C_1} U\left\{C_1, (1+r)\left(W - C_1\right)\right\}. \tag{5}$$

   La condition du premier ordre s'écrit :

$$U_1' = (1+r)\,U_2', \quad \frac{U_1'}{U_2'} = (1+r)\,. \tag{6}$$

   Cette équation s'appelle l'équation d'Euler intertemporelle. Elle fait intervenir deux termes. Le terme de gauche U_1' de la première égalité représente le supplément d'utilité que l'on obtient en consommant une unité supplémentaire consommation dans le présent. Le terme de droite représente le coût de cette unité supplémentaire: l'épargne et les intérêts auxquels on renonce en consommant une unité supplémentaire dans le présent ce qui diminue la consommation future d'un montant $(1+r)$ et par suite l'utilité dans le futur. La deuxième égalité permet une interprétation plus simple en termes graphique. Le terme de gauche, $\frac{U_1'}{U_2'}$, indique la quantité de consommation future à laquelle on est prêt à renoncer pour consommer une unité supplémentaire dans le présent: c'est le taux marginal de substitution intertemporelle. Le terme de droite, $(1+r)$, indique le prix auquel l'individu doit sacrifier une unité de consommation future pour obtenir une unité de consommation présente. C'est le prix relatif de la consommation présente.

Graphique. Traçons d'abord la contrainte budgétaire qui a pour ordonnée à l'origine $(1+r)\,W$ et a pour abscisse à l'origine W. La pente de la contrainte budgétaire est égale à

$$\left.\frac{dC_2}{dC_1}\right|_{\bar{W}} = -\left(1+r\right). \tag{7}$$

Si l'individu consomme toute sa richesse réelle dans le présent, il obtiendrait $\bar{C}_1 = R_1 + \frac{R_2^a}{1+r} = W$. S'il consommait toute sa richesse réelle dans le futur, il consommerait le montant $\bar{C}_2 = (1+r)\ .W$. Cette droite budgétaire indique toutes les combinaisons possibles de consommation dans le temps pour une même richesse réelle.

Traçons ensuite la courbe d'indifférence du consommation, c'est-à-dire la combinaison des consommations présente et future aboutissant au même niveau d'utilité $\bar{U}$. Nous allons voir que la forme des courbes d'indifférence indique la préférence du consommateur à l'égard de la consommation présente. Cette courbe d'indifférence a une pente donnée par :

$$\left.\frac{dC_2}{dC_1}\right|_{\bar{U}} = -\frac{U_1'}{U_2'} < 0. \tag{8}$$

Cette courbe a une pente décroissante et une allure convexe dans le plan (C_1, C_2). Cette pente représente le taux marginal de substitution intertemporel, c'est-à-dire la quantité de consommation future que vous êtes prêt à sacrifier pour consommer une unité supplémentaire dans le présent. Elle varie avec la quantité consommée dans le temps puisque le TMS est fonction de la quantité consommée de chaque bien. Ce TMS est d'autant plus faible que vous consommez un bien en abondance. La convexité de la courbe vient du fait qu'à mesure que l'on renonce à de la consommation future, le supplément d'utilité dans le présent devient de plus en plus faible. On peut également entrevoir cette pente comme la quantité de consommation future l'individu est prêt à renoncer pour consommer une unité supplémentaire dans le présent.

La condition du premier ordre est satisfaite lorsque la pente de la courbe d'indifférence est tangente à la pente de la contrainte budgétaire :

$$\frac{U_1'}{U_2'} = (1+r)\,, \tag{9}$$

cad lorsque la quantité de consommation future à laquelle vous souhaitez renoncer pour consommer une unité de consommation supplémentaire dans le présent coïncide avec le taux auquel vous pouvez échanger la consommation future à la consommation présente. Le terme $\frac{U_1'}{U_2'}$ représente ce que l'on souhaite et le terme $(1+r)$ ce qu'on est en mesure d'atteindre.

4. Définissez le concept de taux de préférence pour le présent noté ρ de manière analytique. Identifiez le taux de préférence pour le présent de manière graphique. Interprétez ce concept de manière économique. On suppose que l'utilité intertemporelle prend la forme suivante:

$$\ln C_1 + \frac{\ln C_2}{1+\delta}, \tag{10}$$

où δ est le taux d'escompte psychologique. Dites ce que représente le terme $\beta \equiv \frac{1}{1+\delta}$. Déterminez l'expression du taux de préférence pour le présent.

Réponse : La pente de la courbe d'indifférence le long d'un sentier constant de consommation $C_1 = C_2$ est égale à $1+\rho$ avec ρ le taux de préférence pour le présent. Ce taux de préférence pour le présent représente donc le taux marginal de substitution intertemporel le long de la bissectrice. Lorsqu'il est positif, cela signifie que l'individu est prêt à sacrifier sa consommation future de plus d'une unité pour obtenir une unité supplémentaire de consommation dans le présent. Une courbe d'indifférence très pentue indique que l'individu est prêt à sacrifier une grande quantité de consommation future et donc une forte préférence pour le présent.

Figure 1. Considérons deux courbes : une courbe d'indifférence presque plate et une autre courbe d'indifférence très pentue. Dans le premier cas, la pente de $\bar{U}$ est faible le long de $C_1 = C_2$ alors que dans le deuxième cas, la pente est élevée. En d'autres termes, le taux de préférence pour le présent mesure le degré avec lequel l'individu est prêt à sacrifier la consommation future à la consommation présente ou encore le supplément d'utilité dans le présent. Ce supplément est élevé lorsque les préférences sont pentues le long d'un sentier constant de consommation.

Le terme $\beta \equiv \frac{1}{1+\delta}$ représente le facteur d'actualisation qui permet de convertir l'utilité de la consommation future en unités de consommation présente. Pour calculer le taux de préférence pour le présent associée à l'utilité intertemporelle (10), on utilise sa

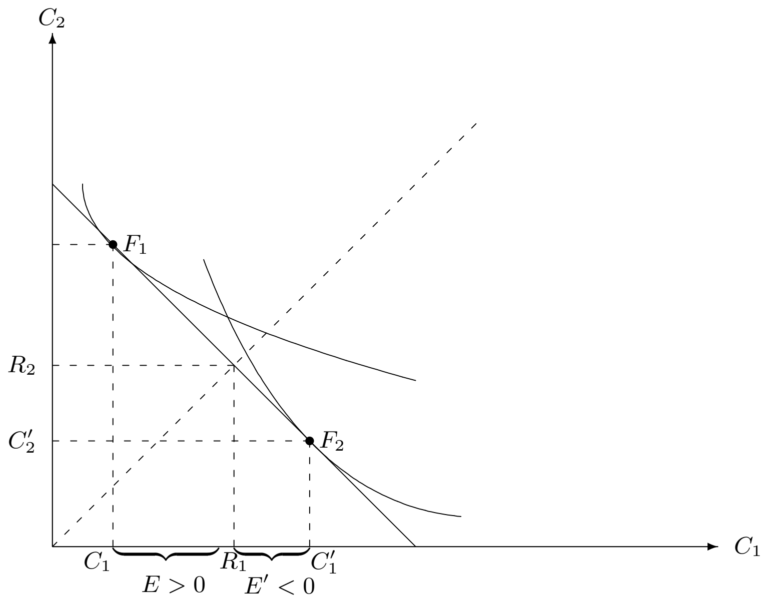

FIG. 1 – *Allure des préférences et taux de préférence pour le présent*

définition:

$$(1+\rho) = \left.\frac{dU/dC_1}{dU/dC_2}\right|_{C_1=C_2} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{(1+\delta)C_2}} = (1+\delta)\,. \tag{11}$$

Lorsque les préférence sont séparables dans le temps, cad lorsque la consommation présente C_1 n'influence pas l'utilité de la consommation future $\frac{\ln C_2}{1+\delta}$, alors le taux de préférence pour le présent coïncide avec le taux d'escompte physchologique : plus le taux d'escompte psychologique est élevé, plus l'utilité future en valeur présente est faible, plus l'individu a une préférence pour le présent.

5. En utilisant la condition du premier ordre et l'utilité intertemporelle (10), montrez que la consommation présente C_1 est égale à:

$$C_1 = \left(\frac{1+\delta}{2+\delta}\right) W. \tag{12}$$

En supposant que $R_1 = R_2^a$, montrez que le montant d'épargne E est donné par:

$$E = \frac{(r-\delta)}{(1+r)\,(2+\delta)}. \tag{13}$$

Identifiez les situations de prêteur puis d'emprunteur de manière graphique selon la forme de la courbe d'indifférence.

Réponse : En substituant la condition du premier ordre $C_2 = C_1 \frac{1+r}{1+\delta}$ dans la contrainte budgétaire intertemporelle (2), on obtient (12). En supposant que $R_1 = R_2$, la richesse W s'écrit:

$$W = \left(\frac{2+r}{1+r}\right) R_1.$$

En substituant cette expression dans (12), on obtient une expression de la consommation présente en fonction du revenu à la première période:

$$C_1 = \left(\frac{2+r}{1+r}\right)\left(\frac{1+\delta}{2+\delta}\right) R_1.$$

En substituant cette expression dans la contrainte budgétaire de la première période, on obtient une expression analytique de l'épargne:

$$E = R_1 - C_1 = R_1 - \left(\frac{2+r}{1+r}\right)\left(\frac{1+\delta}{2+\delta}\right) R_1 = \frac{(r-\delta)}{(1+r)(2+\delta)} .R_1. \tag{14}$$

Remarque: Il est à noter que si la richesse W était indépendante du taux d'intérêt, on aurait l'effet substitution et l'effet revenu habituels qui exercent des effets de sens opposé sur l'épargne et avec une fonction logarithmique, comme l'élasticité de substitution intertemporelle $\sigma_C = -\frac{U'}{U''.C} = 1$, les deux effets se compenserait exactement de telle sorte que la hausse du taux d'intérêt n'aurait aucun effet sur l'épargne. Toutefois, comme la hausse du taux d'intérêt rend l'individu plus riche mais diminue la valeur présente du revenu à la seconde période $Y_2/(1+r)$, l'effet revenu est atténué par rapport au cas standard si bien que même si l'élasticité de substitution est égale à 1, les deux effets ne se compensent pas, à moins que $r = \delta$.

On peut distinguer deux situations : l'individu est prêteur $C_1 < R_1$ (courbe d'indifférence plate) et l'individu est emprunteur $C_1 > R_1$ (courbe d'indifférence pentue). Dans le premier cas, il pourra consommer le montant de son épargne plus des intérêts en plus de son revenu attendu R_2^a, cad $C_2 = (1+r)E + R_2^a$. Dans le deuxième cas, il devra rembourser son emprunt et donc la consommation future sera plus faible car l'épargne est négative. Ces deux situations correspondent à deux cas:

– Dans le premier cas, la pente de la courbe d'indifférence est inférieure à la pente de la contrainte budgétaire le long d'un sentier constant de consommation, cad $\rho < r$, ce qui implique nécessairement que le point de tangence en $U(C_1,C_2)$ et la contrainte budgétaire se situe à gauche du lieu de points $C_1 = C_2$ (cad à gauche de la bissectrice car la courbe étant convexe, la pente de la courbe augmente à mesure que C_1 diminue, jusqu'à devenir tangente avec la droite de budget.

Dans le deuxième cas, la pente de la courbe d'indifférence est supérieure à la pente de la contrainte budgétaire, cad $\rho > r$, ce qui implique nécessairement que le point de tangence se situe à droite du lieu de points $C_1 = C_2$ car la courbe étant convexe, la pente de la courbe diminue à mesure que C_1 augmente (en partant du point d'égalité des consommations), jusqu'à devenir tangente avec la droite de budget.

L'hypothèse $R_1 = R_2$ permet juste de simplifier les situations prêteur ou emprunteur : si la pente $1 + \rho$ de la courbe d'indifférence le long d'un sentier constant de consommation (cad le long de la bissectrice) coïncide avec la pente de la contrainte budgétaire, alors $1+\rho = 1+r$: le point de tangence entre U et la contrainte budgétaire se fait le long de la bissectrice. Comme $R_1 = R_2$ (le revenu se trouve également le long de la bissectrice) : donc $C_1 = R_1$ et $C_2 = R_2$. Donc $C_1 = C_2$ et $E = 0$.

6. Etudiez l'effet d'une hausse du taux d'intérêt $dr > 0$ sur l'épargne à la fois de manière analytique en utilisant (13) et de manière graphique.

   Réponse : Distinguons d'abord l'effet d'une hausse du revenu R_i à la période $i = 1{,}2$ d'une hausse du taux d'intérêt. Une hausse du revenu R_i va déplacer la contrainte budgétaire de manière parallèle vers le nord-est. Le nouveau point de tangence entre la nouvelle contrainte budgétaire et la courbe d'indifférence sera déterminé pour des niveaux plus élevés de C_1 et C_2. En revanche, une augmentation du taux d'intérêt réel va élever le prix relatif de la consommation présente (donc la condition du premier ordre) tout en influençant la contrainte budgétaire intertemporelle en affectant W. De manière graphique, la contrainte budgétaire va pivoter dans le sens des aiguilles d'une montre autour du point de dotation et devenir plus pentue.

   Distinguons deux cas, selon que le consommateur est prêteur ou emprunteur. Supposons d'abord que l'individu est prêteur, cad $C_1 < R_1$.

   - Comme le coût d'opportunité de la consommation présente augmente, cad l'individu va devoir renoncer à un plus grand nombre d'unités de consommation future, l'individu va épargner davantage. C'est ce qu'on appelle en microéconomie l'*effet substitution* qui consiste à raisonner en termes de prix relatif ou de coût d'opportunité.
   - A côté de l'effet substitution, la variation du taux d'intérêt réel va également générer un *effet revenu* qui consiste à raisonner en termes de modification de

ressources. Par exemple, si le taux d'intérêt réel augmente, en plaçant toujours la même somme, vous allez être plus riche au terme de votre placement car la rémunération réelle du placement augmente. Comme votre richesse augmente, vous pouvez consacrer ce supplément de richesse à la consommation présente et future. L'effet revenu incite donc le ménage à épargner moins et à consommer plus dans le présent.

– Bien que l'effet soit indéterminé, on suppose habituellement que l'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu, c'est-à-dire que l'épargnant attache plus d'importance à la modification du prix relatif de la consommation présente et attache moins d'importance à l'accroissement de sa richesse. Par conséquent, l'épargne est une fonction croissante du taux d'intérêt réel.

En différentiant (13), on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial r} &= \frac{R_1}{(1+r)(2+\delta)} - \frac{(r-\delta)\ .R_1}{(1+r)(2+\delta)},\\ &= \frac{R_1}{(1+r)(2+\delta)} - \frac{E}{1+r},\\ &= \frac{R_1(1+\delta)}{(1+r)^2(2+\delta)} < 0.\end{aligned}$$

Le premier terme positif représente $\frac{R_1}{(1+r)(2+\delta)}$ représente l'effet substitution: en élevant le prix relatif de la consommation présente $1+r$, la hausse du taux d'intérêt pousse l'individu à baisser sa consommation présente C_1 et à épargner davantage, que l'individu soit prêteur ou emprunteur. Le deuxième terme est négatif si l'individu est initialement prêteur, cad si $r-\delta > 0$ (dans ce cas, la pente de la contrainte budgétaire est supérieure à la pente de la courbe d'indifférence le long de la bissectrice; comme $R_1 = R_2$ le long de la bissectrice, le point de tangence se fait à gauche de la bissectrice alors cela implique que $C_1 < R_1$ et donc $E > 0$). Ce deuxième terme représente l'effet revenu qui pousse l'individu à augmenter sa consomation présente et future et donc à diminuer son épargne car la hausse du taux d'intérêt le rend plus riche. En revanche, lorsque $r < \delta$, l'individu est emprunteur et comme l'effet revenu est négatif car l'individu paie des intérêts plus élevés, cela l'incite à réduire sa consommation présente et future. Finalement, la satisfaction de l'individu va être réduite lorsque l'individu est emprunteur. Par ailleurs, maintenant, la consommation présente diminue sans ambiguïté et d'autant plus que l'effet revenu est important. Par conséquent, l'emprunt est une fonction décroissante du taux d'intérêt réel: l'épargne devient moins négative.

7. On suppose que la fonction d'utilité U s'écrit $U = C_1 C_2$. Résoudre le programme d'optimisation dans ce cas particulier.

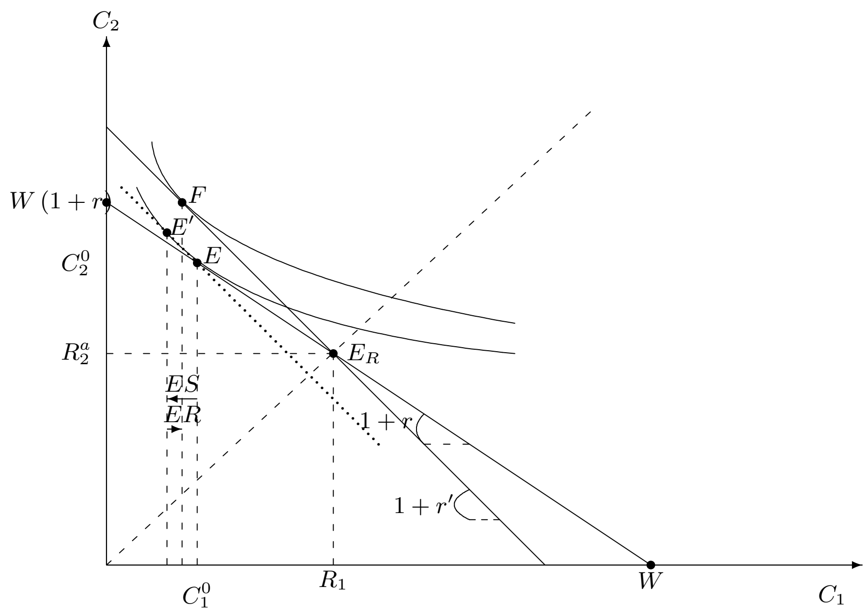

FIG. 2 – *Hausse du taux d'intérêt réel et ajustement de la consommation*

Réponse : La condition du premier ordre s'écrit alors :

$$\frac{C_2}{C_1} = (1+r). \tag{15}$$

L'élasticité de substitition intertemporelle vaut 1 puisque:

$$d \ln \frac{C_2}{C_1} = d \ln (1+r). \tag{16}$$

En substituant la condition du premier ordre dans la CB intertemporelle, on trouve que la consommation présente est égale à la moitié de la richesse réelle : $C_1 = \frac{W}{2}$ et la consommation future est égale à $C_2 = \frac{W(1+r)}{2}$. L'épargne est égale à:

$$\begin{aligned} E &= R_1 - \frac{W}{2}, \\ &= \frac{R_1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{R_2}{1+r}. \end{aligned} \tag{17}$$

Graphique. La pente de la courbe d'indifférence :

$$\left.\frac{dC_2}{dC_1}\right|_{\bar{U}} = -\frac{U_1'}{U_2'} = -\frac{C_2}{C_1} < 0. \tag{18}$$

Le long d'un sentier constant de consommation, la pente de la courbe d'indifférence est égale à 1 et donc le taux de préférence pour le présent est nul. Cela signifie que le point de tangence s'effectue à gauche du lieu des points $C_1 = C_2$. Si $R_1 = R_2$, alors l'individu est prêteur.

La consommation présente baisse sans ambiguïté et la consommation future augmente à la suite d'une hausse du taux d'intérêt:

$$\frac{dC_1}{dr} = -\frac{R_2}{2(1+r)^2} < 0, \quad \frac{dC_2}{dr} = \frac{R_1}{2} > 0. \tag{19}$$

Par conséquent, l'épargne E augmente sans ambiguïté comme le confirme la dérivée de (24) par rapport à r. La raison est la suivante. Lorsque $R_2 > 0$, une modification du taux d'intérêt engendre trois effets de sens opposé: un effet substitution qui diminue la consommation présente en élevant le prix relatif de la consommation présente, un effet revenu qui encourage l'individu à éleve rsa consommation présente, et un effet richesse non financière qui réduit la richesse en valeur présente et qui encourage l'individu à diminuer sa consommation. Lorsque l'élasticité de substitution intertemporelle est égale à 1, l'effet substitution et l'effet revenu se compensent parfaitement et ne subsiste que l'effet richesse non financière. Donc la hausse du taux d'intérêt réduit la consommation présente. Bien que la consommation future C_2 soit affectée négativement par la hausse du taux d'intérêt qui réduit la richesse non financière en valeur présente, l'effet revenu combiné à l'effet substitution encouragent l'individu à élever sa consommation future.

8. Que se passe-t-il si le taux d'intérêt créditeur r_1 est inférieur au taux d'intérêt débiteur r_2 ?

   Réponse : Nous allons maintenant prendre en compte le fait que le taux d'intérêt créditeur r_1 est inférieur au taux d'intérêt débiteur r_2. Il faut considérer deux cas selon que l'individu est emprunteur ou créditeur à la première période puisque le facteur d'actualisation sera fonction du taux d'intérêt débiteur ou créditeur :

$$C_1 > R_1, \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} = R_1 + \frac{R_2}{1+r_2} = W_1, \tag{20a}$$

$$C_1 < R_1, \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r_1} = R_1 + \frac{R_2}{1+r_1} = W_2. \tag{20b}$$

   D'une manière générale, à la période 2, l'individu consomme un montant donné par $C_2 = (1+r)\ .E + R_2$. Lorsque $C_1 > R_1$, l'individu emprunte et rembourse à la période suivante. Donc l'individu consomme un montant $C_2 = (1+r_2)\ .E + R_2$. En utilisant la contrainte budgétaire de la période 2 $E = \frac{C_2 - R_2}{1+r_2}$ pour éliminer l'épargne dans la contrainte budgétaire de la période 1, on obtient (20). Lorsque $C_1 < R_1$, l'individu prête et reçoit le remboursement du principal et des intérêts à la période suivante. Donc l'individu consomme un montant $C_2 = (1+r_1)\ .E + R_2$.

   Graphique. Prenons le cas où $R_1 = R_2$. A droite de la bissectrice, cad pour des niveaux de consommation $C_1 > R_1$, la pente de la contrainte budgétaire en valeur absolue est $1 + r_2$ (elle est pentue). Puis à gauche de la bissectrice, cad pour des niveaux de consommation $C_1 < R_1$, la pente de la contrainte budgétaire en valeur absolue est $1 + r_1$ (elle a une pente faible).

   Lorsque les préférences prennent la forme $U = C_1 C_2$, l'individu est prêteur lorque $R_1 = R_2$ car le choix de consommation se fait toujours à gauche de la bissectrice. Donc l'individu fait face au taux d'intérêt prêteur r_1 puisqu'il épargne une partie de son revenu. Si le taux d'intérêt r_1 est plus faible que le taux d'intérêt r, alors l'individu va élever sa consommation présente car la baisse du taux d'intérêt élève la valeur présente de la richesse non financière.

2 Les effets de la dette publique dans le modèle de générations imbriquées

L'économie est composée d'un ménage représentatif et d'une firme représentative. On suppose que les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population croît à un taux constant n. L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \ln\left(C_{t+1}^O\right). \tag{21}$$

Le paramètre $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t qui est dépensé en biens de consommation C_t^Y, le reste étant épargné S_t. Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt de son épargne $r_{t+1}S_t$. L'individu âgé consacre intégralement le principal et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires des ménages s'écrivent donc de la façon suivante:

$$C_t^Y + S_t = W_t, \tag{22a}$$

$$C_{t+1}^O = \left(1 + r_{t+1}\right) S_t. \tag{22b}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital K_t et du travail L_t selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante sous forme intensive:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = k_t^{1-\epsilon_L}, \quad 0 < \epsilon_L < 1. \tag{23}$$

Le coût d'une unité de travail est égal au salaire W_t et le coût d'une unité de capital est égal à R_t^K. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise à 1, le bien final étant le numéraire. On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite.

On cherche à étudier l'impact de la dette publique dans le modèle Diamond-Samuelson.

1. On note G_t les dépenses publiques, B_t et B_{t+1} la dette publique aux dates t et $t+1$; le taux d'intérêt sur la dette publique est r_t. On désigne par T_t^Y et T_t^O l'impôt forfaitaire prélevé sur les travailleurs jeunes et les retraités. Ecrire la contrainte budgétaire de l'Etat.

   Réponse : La contrainte budgétaire de l'Etat implique l'égalité entre les recettes et les ressources. Les recettes sont constituées des impôts prélevés sur les jeunes qui sont en nombre L_t et sur les retraités (nés en $t-1$) et en nombre L_{t-1}. Les ressources sont donc constituées des impôts dont le montant total à la date t est égal à $L_t \times T_t^Y + L_{t-1} \times T_t^O$. La deuxième composante des ressources est constituée de l'émission de dette publique en $t+1$, $B_{t+1} - B_t$ qui permet de couvir l'excès de dépenses sur l'impôt forfaitaire.

Les dépenses de l'Etat sont composées des dépenses publiques G_t, du paiement des intérêts sur la dette publique $r_t \times B_t$. La contrainte budgétaire s'écrit donc:

$$G_t + (1 + r_t)\, B_t = L_t T_t^Y + L_{t-1} T_t^O + B_{t+1}. \tag{24}$$

2. En notant $g_t \equiv G_t/L_t$, $b_t \equiv B_t/L_t$ les dépenses publiques et la dette publique par habitant, montrer que la contrainte budgétaire peut s'écrire:

$$g_t + (1 + r_t)\, b_t = T_t^Y + \frac{T_t^O}{1+n} + (1+n)\, b_{t+1}. \tag{25}$$

Réponse : En divisant les membres de gauche et de droite de la contrainte budgétaire de l'Etat (24), on obtient:

$$\frac{G_t}{L_t} + (1 + r_t)\, \frac{B_t}{L_t} = T_t^Y + \frac{L_{t-1}}{L_t} T_t^O + \frac{L_{t+1}}{L_t} \frac{B_{t+1}}{L_{t+1}},$$

et en utilisant le fait que $L_t = (1 + n)\, L_{t-1}$ puisque la population croît au taux n, on obtient (25).

3. Réécrire les contraintes budgétaires (22) en prenant en compte le prélèvement d'un impôt forfaitaire T_t^j (avec $j = Y{,}O$). Ecrire la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent représentatif. Déterminer les choix de consommation C_t^Y et C_{t+1}^O permettant d'atteindre l'utilité intertemporelle (21) la plus élevée possible sous la contrainte budgétaire intertemporelle. Montrer que l'épargne optimale, S_t, s'écrit:

$$S_t = \frac{1}{2+\rho} \left(W_t - T_t^Y\right) + \frac{1+\rho}{2+\rho} \frac{T_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}}. \tag{26}$$

Comment varie l'épargne avec l'impôt présent T_t^Y et l'impôt futur T_{t+1}^O? Expliquer.

Réponse : En prenant en compte le fait que l'agent représentatif paie un impôt forfaitaire lorsqu'il est jeune puis retraité, les contraintes budgétaires (22) sont réécrites de la façon suivante:

$$C_t^Y + S_t = W_t - T_t^Y, \tag{27a}$$

$$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})\, S_t - T_{t+1}^O. \tag{27b}$$

Pour déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut éliminer S_t des contraintes budgétaires. A cette fin, en utilisant (27b), on obtient: $S_t = \frac{C_{t+1}^O + T_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}$. Puis en substituant cette expression dans (27a), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t - T_t^Y - \frac{T_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} \equiv \Omega_t, \tag{28}$$

où Ω_t est la valeur présente actualisée des flux de revenu courant et futur disponible (on retranche les impôts).

Pour déterminer les niveaux de consommation optimale, on élimine la consommation future C_{t+1}^O de l'utilité intertemporelle (21) en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle (28), c'est-à-dire $C_{t+1}^O = (1+r_{t+1})\left(\Omega_t - C_t^Y\right)$:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\ln\left[(1+r_{t+1})\left(\Omega_t - C_t^Y\right)\right]. \tag{29}$$

En différentiant par rapport à C_t^Y et en annulant la dérivée partielle, on obtient l'équation d'Euler ou la choix optimal du profil temporel de la consommation ou encore l'égalité entre le taux marginal de substitution intertemporel et

$$\frac{(1+\rho)\,C_{t+1}^O}{C_t^Y} = (1+r_{t+1}) \tag{30}$$

En éliminant C_{t+1}^O de la CB intertemporelle (28) en utilisant l'équation d'Euler (30), on obtient la consommation optimale du travailleur en fonction du revenu disponible permanent Ω_t:

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}\Omega_t, \tag{31}$$

où $\frac{1+\rho}{2+\rho}$ est la propension à dépenser le revenu permanent. En substituant (31) dans (30), on obtient la consommation optimale lorsque l'individu est retraité:

$$C_{t+1}^O = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}\Omega_t, \tag{32}$$

Pour déterminer l'épargne optimale, on substitue (31) dans la contrainte budgétaire (27a):

$$S_t = \frac{1}{2+\rho}\left(W_t - T_t^Y\right) + \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{T_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}. \tag{33}$$

L'épargne diminue avec l'impôt courant T_t^Y et augmente avec l'impôt futur T_{t+1}^O. Pour expliquer ce résultat, il faut étudier comment varient les consommations avec le revenu disponible permanent: une hausse de l'impôt (quel qu'il soit) réduit la richesse après impôt Ω_t et donc les consommations aux deux périodes. Lorsque l'impôt forfaitaire courant T_t^Y s'accroît, la consommation C_t^Y baisse moins que proportionnellement que Ω_t car la propension à consommer est $\frac{1+\rho}{2+\rho} < 1$ comme le montre (31). Donc l'épargne S_t diminue: l'individu répartit la baisse du revenu disponible à la période t en baissant ses consommations en t et en $t+1$ et donc en réduisant son épargne. Lorsque l'impôt futur T_{t+1}^O augmente, les consommations en t et $t+1$ baissent mais le revenu disponible à la date t $W_t - T_t^Y$ est inchangé: donc l'épargne augmente.

4. Ecrire le profit de la firme représentative noté Π_t. Montrer que la fonction de production $Y_t = (L_t)^{\epsilon_L} (K_t)^{1-\epsilon_L}$ est à rendements d'échelle constants. Déterminer les conditions du premier ordre. Montrez que le coût du capital R_t^K est égal à $r_t + \delta$, où δ est le taux de dépréciation du capital, en utilisant une simple relation d'arbitrage. Montrer que la production est intégralement consacrée à la rémunération des facteurs de production. Comment varient le taux d'intérêt r_t et le salaire W_t avec le stock de capital par travailleur $k_t \equiv K_t/L_t$?

   Réponse : Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production (on pose $P = 1$ car le bien final est le numéraire):

$$\Pi_t \equiv F(K_t, L_t) - W_t L_t - R_t^K K_t. \tag{34}$$

   Une fonction de production est à rendements d'échelle constants lorsqu'elle est homogène de degré 1 : $\lambda^1 Y_t = F[\lambda K_t, \lambda L_t]$:

$$(\lambda L_t)^{\epsilon_L} (\lambda K_t)^{1-\epsilon_L} = \lambda^1 Y_t.$$

   Les conditions du premier ordre sont obtenues en différentiant le profit par rapport au capital et au travail et en annulant les dérivées partielles car de cette façon, la firme utilise une quantité de facteur permettant d'atteindre le profit le plus élevé (le profit prend la forme d'une courbe en cloche, la tangente à la fonction de profit a une pente nulle au sommet de Π_t):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} &= 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = R_t^K, \\ \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} &= 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t. \end{aligned}$$

   En différentiant $Y_t = (L_t)^{\epsilon_L} (K_t)^{1-\epsilon_L}$ par rapport à K_t puis L_t on obtient

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = (1-\epsilon_L)(k_t)^{-\epsilon_L}, = R_t^K, \tag{35a}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = \epsilon_L (k_t)^{1-\epsilon_L} = W_t, \tag{35b}$$

   où on a utilisé le fait que $K_t/L_t = k_t$. Comme $1 - \epsilon_L > 0$, une hausse de k_t élève la productivité marginale du travail et donc le salaire car les travailleurs sont rémunérés à leur productivité marginale. D'après (35a), le taux d'intérêt r_t est égal à: $(1-\epsilon_L)(k_t)^{-\epsilon_L} - \delta$ puisque $R_t^K = r_t + \delta$. D'après cette expression, une hausse de k_t réduit le taux d'intérêt en diminuant la productivité marginale du capital en raison de l'existence de rendements décroissants par rapport à l'accumulation des facteurs.

Une relation d'arbitrage ou plutôt d'absence d'opportunités d'arbitrage établit que le taux de rendement des actifs doit s'égaliser. Commme les obligations publiques rapportent un taux d'intérêt r_{t+1} à la date $t+1$, une unité de capital doit rapporter le même montant.

On considère une firme de location de capital dont le propriétaire est l'agent représentatif lorsqu'il est à la retraite. Cette firme doit choisir à la date t le stock de capital physique qu'elle loue à la date $t+1$ au prix R^K_{t+1}; une fraction δ du capital est dépréciée de telle sorte qu'à la date $t+1$, l'entreprise de location ne récupèrera que le montant $(1-\delta)\,K_{t+1}$. En actualisant le rendement du capital à la date $t+1$ plus le remboursement du principal, le profit de l'entreprise de location s'écrit:

$$\Pi^L_t \equiv -K_{t+1} + \frac{R^K_{t+1}K_{t+1} + (1-\delta)\ .K_{t+1}}{1+r_{t+1}}, \tag{36}$$

L'entreprise de location choisira de constituer et de louer un stock de capital K_{t+1} de façon à obtenir le profit Π^L le plus élevé possible:

$$\frac{\partial \Pi^L_t}{\partial K_{t+1}} = -1 + \frac{R^K_{t+1} + (1-\delta)}{1+r_{t+1}} = 0. \tag{37}$$

De cette demande de capital de la part de l'entreprise de location, on trouve que le taux d'intérêt est égal à $r_{t+1} = R^K_{t+1} - \delta$.

Remarque: Le profit Π^L est nul c'est pourquoi il n'apparaît pas dans la contrainte budgétaire de l'individu lorsqu'il est retraité. Pour le voir, réécrivons le profit en substituant $R^K_{t+1} = r_{t+1} + \delta$ dans (36):

$$\begin{aligned} \Pi^L_t &= -K_{t+1} + \frac{(r_{t+1}+\delta)\ .K_{t+1} + (1-\delta)\ .K_{t+1}}{1+r_{t+1}}, \\ &= -K_{t+1} + K_{t+1} = 0. \end{aligned}$$

Sous la condition de rendements d'échelle constants, le théorème d'Euler implique que la production est égale à la somme des contributions de chaque facteur de production:

$$Y_t \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}L_t.$$

L'hypothèse de concurrence parfaite sur les marchés des biens et des facteurs de production implique que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale:

$$Y_t \equiv R^K_t K_t + W_t L_t. \tag{38}$$

Donc le profit Π_t est nul: c'est pourquoi il n'apparaît pas dans les contraintes budgétaires.

5. Ecrire l'équilibre sur le marché des biens et services en définissant au préalable l'investissement I_t. A l'aide des contraintes budgétaires des travailleurs jeunes à la date t et des retraités à la même date, déterminer la consommation totale $C_t = L_t C_t^Y + L_{t-1} C_t^O$. Montrer que l'équilibre sur le marché des biens et services a pour corollaire l'équilibre sur le marché des capitaux:

$$S_t = (1+n) \times (k_{t+1} + b_{t+1}) \,. \tag{39}$$

Réponse : L'investissement correspond à l'accumulation du capital nécessaire pour amener le capital à son niveau optimal $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$, et à l'investissement nécessaire pour remplacer les machines obsolètes δK_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t. \tag{40}$$

D'après l'équilibre sur le marché des biens et services, la production finale Y_t est égale la dépense finale composée de la consommation totale, de l'investissement et des dépenses publiques:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{41}$$

La consommation totale est composée de la consommation des travailleurs jeunes $L_t C_t^Y$ en nombre L_t et des retraités $L_{t-1} C_t^O$ en nombre L_{t-1} (car ils sont nés à la période précédente et sont toujours en vie à la date t), La consommation des travailleurs jeunes est égale à la part du revenu disponible qui n'est pas épargnée: $L_t C_t^Y = L_t \left(W_t - T_t^Y - S_t\right)$. La consommation des retraités est égale au rendement du capital plus le capital net de la dépréciation $L_{t-1} C_t^O = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t + (1+r_t) B_t - L_{t-1} T_t^O$ (ce sont les propriétaires de l'entreprise de location du capital et comme l'épargne des jeunes consistent à détenir des créances sur l'économie, ces créances sont composées à la fois d'obligations privées K_t et d'obligations publiques B_t). La consommation totale C_t est égale à:

$$\begin{aligned} C_t &= L_t C_t^Y + L_{t-1} C_t^O, \\ &= L_t \left(W_t - S_t - T_t^Y\right) + R_t^K K_t + (1-\delta) K_t + (1+r_t) B_t - L_{t-1} T_t^O, \\ &= Y_t + (1-\delta) K_t + B_{t+1} - G_t - L_t S_t, \end{aligned} \tag{42}$$

où on a utilisé (38) qui implique que $Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, et la contrainte budgétaire de l'Etat (24) qui implique que $B_{t+1} - G_t = (1+r_t) B_t + L_{t-1} T_t^O + L_t T_t^Y$.

En utilisant le fait qu'en présence de rendements d'échelle constants, $Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, et en substituant (42) dans l'équilibre du marché des biens et services (41):

$$L_t S_t = (1-\delta) K_t + B_{t+1} + I_t,$$

qui peut être réécrite en utilisant l'investissement (40)

$$L_t S_t = K_{t+1} + B_{t+1}.$$

Comme $L_t S_t$ représentant l'offre de fonds et K_{t+1}^D le capital demandé et B_{t+1} la demande de financement de l'Etat. Comme il y a équilibre sur le marché des capitaux, $K_{t+1}^D = K_{t+1}$ et donc $L_t S_t = K_{t+1} + B_{t+1}$. En divisant L'offre d'épargne par L_{t+1}, on obtient:

$$\frac{L_t}{L_{t+1}} S_t = \frac{K_{t+1} + B_{t+1}}{L_{t+1}}.$$

En utilisant le fait que $L_{t+1}/L_t = 1 + n$, on obtient (39). Pour mieux comprendre, supposons que $B_{t+1} = 0$ ce qui implique $L_t S_t = K_{t+1}$; en retranchant K_t des deux membres, on obtient:

$$\begin{aligned} L_t S_t - (1-\delta)\ .K_t &= K_{t+1} - (1-\delta)\ .K_t, \\ &= I_t. \end{aligned}$$

Le terme de gauche représente l'épargne nette: c'est l'épargne des jeunes moins la désépargne des retraités (qui 'mangent' le capital). Le terme de droite représente l'investissement brut, cad l'accumulation de capital permettant d'amener le capital au niveau optimal à long terme plus l'amortissement. En d'autres termes, les jeunes, pour élever le stock de capital futur, doivent rembourser $(1-\delta)\ .K_t$ aux retraités et élever le stock de capital.

On peut représenter le marché des capitaux (destinés aux firmes) dans le plan (K_{t+1},r_{t+1}). La demande de capital est indiquée par $F_K\left[K_{t+1}^D, L_0 (1+n)^{t+1}\right]$ qui est décroissante. L'offre de capital est indiquée par $L_t\ .S_t - B_{t+1} = K_{t+1}^S$. Elle est représentée par une droite horizontale.

6. On étudie les effets d'un accroissement des dépenses publiques g_t. A cette fin, on suppose que la dette de l'Etat est nulle ($b_t = b_{t+1} = 0$), et on considère que les dépenses publiques supplémentaires sont financées par un impôt forfaitaire payé par les travailleurs jeunes, c'est-à-dire $dg_t = dT_t^Y$, l'impôt forfaitaire payé par les retraités étant maintenu constant, $T_t^O = T^O$. En utilisant (39), déterminer l'équation d'accumulation du capital et montrer que la convergence vers l'équilibre de long terme est stable. Déterminer les effets à court terme et à long terme d'une hausse de g sur k_{t+1}.
   Réponse : D'après (39), $(1+n)\,k_{t+1} = S_t - (1+n)\,b_{t+1}$. En utilisant le fait que la dette publique est nulle, cette équation devient $(1+n)\,k_{t+1} = S_t$. On substitue l'expression de l'épargne (33) pour obtenir l'équation d'accumulation du capital:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(2+\rho)} \left[\left(W_t - T_t^Y\right) + (1+\rho) \frac{T^O}{1+r_{t+1}} \right]. \tag{43}$$

D'après (35a) et (35b), le taux d'intérêt $r_{t+1} = (1-\epsilon_L)(k_{t+1})^{-\epsilon_L} - \delta$ dépend négatievemnt de k_{t+1} et le salaire $\epsilon_L (k_t)^{1-\epsilon_L} = W_t$ dépend positivement de k_t:

$$r_{t+1} = r(k_{t+1}), \quad r' < 0, \quad W_t = W(k_t), \quad W' > 0. \tag{44}$$

En substituant (44) dans (43), on obtient:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(2+\rho)}\left[\left(W(k_t) - T_t^Y\right) + (1+\rho)\frac{T^O}{1+r(k_{t+1})}\right]. \tag{45}$$

Pour que l'économie converge vers l'équilibre de long terme où le stock de capital par travailleur reste constant, $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$, les ajustements du capital doivent être de plus en plus petits au cours du temps. En d'autres termes, pour que la trajectoire ne soit pas explosive mais convergente, la variation du capital par travailleur futur dk_{t+1} doit être moins importante que la variation du capital d'aujourd'hui dk_t; donc la stabilité de la dynamique de l'économie nécessite que le rapport dk_{t+1}/dk_t soit inférieur à 1; et comme la variation peut être négative, la condition de stabilité doit être écrite en valeur absolue :

$$\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1. \tag{46}$$

En différentiant (45), on obtient:

$$dk_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(2+\rho)}\left[W'(k_t)\,dk_t - (1+\rho)\frac{r'.T^O}{(1+r(k_{t+1}))^2}dk_{t+1}\right].$$

Pour simplifier, on évalue la dérivée au voisinage de l'état-stationnaire, cad $k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$ de telle sorte que $r(k_{t+1}) = r\left(\tilde{k}\right) = \tilde{r}$. En factorisant les termes en dk_{t+1}, on obtient

$$dk_{t+1} = \frac{W'}{\Delta}dk_t, \tag{47}$$

où Δ est donné par:

$$\Delta = (1+n)(2+\rho) + (1+\rho)\frac{T^O}{(1+\tilde{r})^2}r'. \tag{48}$$

Le signe de (48) est ambigü, on suppose que $\Delta > 0$, de façon à ce que l'accroissement du stock de capital d'aujourd'hui élève le stock de capital futur ce qui est le cas lorsque T^O suffisamment faible ce qui est raisonnable: l'intuition est la suivante. L'épargne S_t décrite par (33) augmente sous l'effet de k_t car cela élève le salaire W_t et sous l'effet de l'anticipation de la baisse de r_{t+1} provenant de la hausse future de k_{t+1} ce qui accroît $\frac{T^O}{1+r_{t+1}}$: c'est l'effet d'un accroissement de k_t et de k_{t+1} sur l'offre de capital S_t. D'un autre côté, la demande de capital est décrite par: $(1+n)dk_{t+1}$. On suppose juste qu'une hausse de k_{t+1} provoque un excès de demande de capital:

cad une hausse de k_{t+1} fait plus augmenter la demande de capital $(1+n)dk_{t+1}$ que l'offre de capital $(dS_t/dk_{t+1})dk_{t+1}$. Après avoir imposé la condition $\Delta > 0$, il faut déterminer la condtion de stabilité. D'après (46), cela revient à supposer que:

$$\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| = \frac{W'}{\Delta} < 1, \quad \Rightarrow \quad W' < \Delta. \tag{49}$$

Cette condition garantit que les accroissements de capital par travailleur sont de plus en plus petits et donc que l'économie converge vers un niveau stationnaire du capital par travail. Cela signifie que le salaire et donc l'épargne augmentent moins vite que le capital par travailleur (en raison de rendements décroissants). Comme dans le modèle de Solow, il existe à long terme un investissement qui permet de renouveler le capital obsolète et de doter les nouveaux travailleurs en capital. Pour le voir, à long terme, $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_t$; donc $K_{t+1} = L_{t+1}k_t = \frac{L_{t+1}}{L_t}K_t = (1+n)\,K_t$. En substituant cette expression dans $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = (n+\delta)\,K_t$ à long terme.

Pour déterminer l'effet d'une hausse des dépenses publiques g_t financée par une hausse de T_t^Y, cad $dg_t = dT_t^Y$, il faut différentier totalement l'équation d'accumulation du capital (43):

$$\Delta dk_{t+1} = W'(k_t)dk_t - dT_t^Y = W'(k_t)dk_t - dg_t. \tag{50}$$

où Δ est donné par (48). On peut calculer l'effet d'une hausse des dépenses publiques à court terme en utilisant le fait que le capital initial k_t est prédéterminé (donc $dk_t = 0$):

$$\frac{dk_{t+1}}{dg_t} = -\frac{1}{\Delta} < 0. \tag{51}$$

Un accroissement des dépenses publiques implique une baisse du revenu disponible, donc une baisse de l'épargne, ce qui diminue l'investissement et donc le capital. A long terme, $dk_{t+1} = dk_t = d\tilde{k} = dk_\infty$ et donc en utilisant (52), on obtient:

$$\frac{dk_\infty}{dg_t} = -\frac{1}{\Delta - W'} < 0. \tag{52}$$

On remarque que l'effet est plus négatif à long terme qu'à court terme: $\frac{dk_\infty}{dg_t} < \frac{dk_{t+1}}{dg_t} < 0$. La raison est qu'à court terme, la baisse du stock de capital provient d'une baisse de l'épargne à une période. Cette réduction du stock de capital par travailleur lors d'une période entraîne une baisse du salaire à la période suivante, donc de l'épargne et par conséquent du stock de capital par travailleur et ainsi de suite. Finalement, le baisse du stock de capital à long terme reflète à la fois la baisse du revenu disponible à la première période et la réduction de l'épargne lors des périodes suivantes. En d'autres termes, une hausse de l'impôt forfaitaire entraîne un effet multiplicateur à la baisse. La baisse du stock de capital a entraîné une baisse de salaire $W' d\tilde{k} < 0$ ce qui réduit encore davantage l'épargne et donc le stock de capital.

7. On suppose que l'Etat décide de supprimer l'impôt forfaitaire prélevé sur le revenu des retraités: $T^O = 0$. Par ailleurs, l'Etat maintient la dette publique par habitant constante, $b_t = b_{t+1} = b$. On suppose que $r_t > n$. Montrer qu'un accroissement de la dette publique conduit à une réduction du stock de capital par travailleur à court terme et à long terme.

Réponse : En posant $T^O = 0$, la contrainte budgétaire de l'Etat devient:

$$g + (1 + r_t)\, b = T_t^Y + (1 + n)\, b. \tag{53}$$

Cette relation indique que les dépenses publiques ainsi que le remboursement du principal et des intérêts de la dette doivent être financés par une hausse des impôts et l'émission de dette publique. En différentiant, on obtient l'accroissement de l'impôt T_t^Y sur les travailleurs jeunes pour financer les intérêts sur la dette publique:

$$dT_t^Y = (r_t - n)\, db > 0, \tag{54}$$

sous l'hypothèse de l'énoncé $r_t > n$ qui implique que les intérêts sur la dette $r_t b$ sont supérieurs à la quantité de dette supplémentaire émise grâce à la croissance de la population (les jeunes supplémentaires achètent les obligations supplémentaires émises de telle sorte que $b = B/L$ reste constant.

L'équation d'accumulation du capital (39) est réécrite de la façon suivante en supposant $b_{t+1} = b$ constant dans le temps:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(2+\rho)} \left[W(k_t) - T_t^Y \right] - b. \tag{55}$$

L'effet d'une hausse de la dette publique sur le stock de capital k_{t+1} à court terme (donc $W' dk_t = 0$ car k_t est le niveau initial prédéterminé du stock de capital):

$$\frac{dk_{t+1}}{db} = -\frac{1}{(1+n)(2+\rho)} \times \frac{dT_t^Y}{db} - 1 < 0. \tag{56}$$

Puis en substituant (54), on obtient;

$$\frac{dk_{t+1}}{db} = -\left[1 + \frac{(r_t - n)}{(1+n)(2+\rho)} \right] < -1. \tag{57}$$

La hausse de la dette publique provoque une très forte éviction du stock de capital (cad le diminue fortement) en réallouant l'épargne des jeunes vers l'acquisition de titres publics B plutôt que de créances sur le capital K, et en plus la hausse de l'impôt forfaitaire pour payer les intérêts de la dette $(r-n)\times b$ réduit l'épargne des travailleurs et donc l'investissement.

A long terme, l'effet négatif sur le stock de capital est amplifié par la baisse du salaire (car $W'dk<0$) par rapport à l'effet à court terme:

$$\frac{d\tilde{k}}{db}=-\frac{(r_t-n)+(1+n)(1+\rho)}{(1+n)(2+\rho)-W'}<0. \tag{58}$$

En conclusion, une hausse de la dette publique provoque une baisse du stock de capital à court terme en réallouant l'épargne ves le financement de la dette publique plûtôt que le financement de l'accumulation du capital et en augmentant la charge d'intérêt ce qui nécessite une hausse de l'impôt qui réduit l'épargne. Une hausse de la dette publique provoque une baisse du stock de capital plus forte à long terme car la baisse du stock à court terme provoque une réduction du salaire et donc de l'épargne lors des périodes suivantes.

3 Exercice : Croissance économique dans un modèle à générations imbriquées

On considère que l'économie est constituée à chaque date t de travailleurs (individus jeunes) et de retraités (individus âgés). Lorsqu'il est jeune à la date t, l'agent représentatif travaille et obtient en contrepartie un salaire W_t qu'il répartit entre consommation C_t^Y qui lui procure une utilité instantanée $\ln C_t^Y$, et épargne S_t. Puis une fois retraité, l'agent représentatif a un revenu qui correspond à son épargne S_t plus le rendement des fonds épargnés. Les retraités sont propriétaires du capital et l'épargne est donc rémunéré au taux r_{t+1} qui est déterminé par la productivité marginale du capital nette de la dépréciation du capital δ. On suppose l'absence de croissance de la population. On normalise la population totale à 1, cad $L_t=L_{t-1}=L=1$.

La firme représentative utilise du travail L_t et du capital K_t pour produire un bien final en quantité Y_t. Le coût d'une unité de travail est égal au salaire W_t et le coût d'une unité de capital est égal à R_t^K. Les facteurs de production sont combinés selon une technologie de production à élasticité de substitution constante:

$$F\left(K_t,L_t\right)=A\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\alpha)\left(L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{59}$$

où le paramètre σ est supposé supérieur à 1. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise 1, le bien final étant le numéraire. On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite.

1. On note ρ le taux d'escompte physchologique. Ecrivez la fonction d'utilité intertemporelle et les contraintes budgétaires de l'agent représentatif à la date t et à la date $t+1$.

   Réponse : L'utilité intertemporelle s'écrit de la façon suivante:

   $$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho} \ln C_{t+1}^O. \tag{60}$$

   L'individu à la date t consacré une partie de son salaire à la consommation et le reste est épargne:

   $$C_t^Y + S_t = W_t. \tag{61}$$

   Une fois âgé, l'individu consomme le principal et les intérêts:

   $$C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) S_t. \tag{62}$$

2. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle. Déterminez les conditions du premier ordre du programme de maximisation de l'agent représentatif. Vérifiez que la consommation C_t^Y augmente avec le taux de préférence pour le présent et que l'épargne S_t diminue avec ρ. Exprimées les consommations permettant d'atteindre l'utilité intertemporelle la plus élevée possible ainsi que l'épargne en fonction du salaire W_t. Montrez que l'élasticité de substitution intertemporelle σ_t^j (avec $j = Y,O$) est égale à 1. Explique la raison pour laquelle l'épargne est indépendante du taux d'intérêt.

   Réponse : En utilisant la contrainte budgétaire à la date $t+1$, $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{(1+r_{t+1})}$, on élimine l'épargne de la contrainte budgétaiore (61) ce qui conduit à la contrainte budgétaire intertemporelle:

   $$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t. \tag{63}$$

   En utilisant (63), $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)$, on peut éliminer C_{t+1}^O de l'utilité intertemporelle (60):

   $$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho} \ln \left[(1 + r_{t+1}) \left(W_t - C_t^Y\right)\right]. \tag{64}$$

   En différenciant l'utilité intertemporelle par rapport à C_t^Y puis en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité habituelle entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente (cad des travailleurs jeunes):

   $$\frac{C_{t+1}^O (1+\rho)}{C_t^Y} = (1 + r_{t+1}). \tag{65}$$

En utilisant (65), $C_{t+1}^{O} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y$, de façon à éliminer C_{t+1}^{O} de la contrainte budgétaire intertemporelle, on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t:

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t. \tag{66}$$

Puis en combinant la condition du premier ordre (65) et (66), on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est retraité en fonction du salaire W_t:

$$C_{t+1}^{O} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho} W_t. \tag{67}$$

Enfin, en substituant (66) dans la contrainte budgétaire à la date t (61), on obtient l'épargne de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t:

$$S_t = W_t - C_t^Y = \frac{1}{2+\rho} W_t. \tag{68}$$

Nous avons vu précédemment que le taux d'escompte physchologique ρ coïncide avec le taux de préférence pour le présent. La propension marginale à consommer le salaire W_t dans le présent $\frac{\partial C_t^Y}{\partial W_t} = \frac{1+\rho}{2+\rho}$ croît avec ρ et donc la propension à épargner $\frac{1}{2+\rho}$ diminue avec ρ.

L'élasticité de substitution intertemporelle σ_j^C ($j = C$,O) est définie comme l'inverse du degré de courbure ϵ_C:

$$-\frac{\partial U^{j,\prime}}{\partial C^j} . \frac{C^j}{U^{j,\prime}} = \epsilon_C$$

Comme le degré de courbure vaut 1 (puisque $U' = 1/C^j$ et $-U''C^j = 1/C^j$), l'élasticité de substitution vaut 1. Cette élasticité indique comment varie la consommation au cours du temps à la suite d'une hausse du taux d'intérêt r_{t+1}. En supposant que $U\left(C^j\right) = \frac{\left(C^j\right)^{1-\frac{1}{\sigma_C^Y}}}{1-\frac{1}{\sigma_C^Y}}$, la condition du premier ordre (65) est réécrite:

$$\frac{C_{t+1}^{O}}{C_t^Y} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{\sigma_Y^C}.$$

Lorsque $\sigma_C^Y = 1$, l'effet substitution est parfaitement compensé par l'effet revenu si bien que l'épargne est indépendante du taux d'intérêt. Lorsque $\sigma_Y^C > 1$, l'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu.

3. Ecrivez le profit de la firme représentative noté Π_t. Montrez que la fonction de production (59) est à rendements d'échelle constants. Déterminez les conditions du premier ordre. Montrez que la production est intégralement consacrée à la rémunération des facteurs de production.

Réponse : Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production:

$$\Pi_t \equiv F\left(K_t,L_t\right) - W_t L_t - R_t^K K_t. \tag{69}$$

Une fonction de production est à rendements d'échelle constants lorsqu'elle est homogène de degré 1 : $\lambda^1 Y_t = F\left[\lambda K_t,\lambda L_t\right]$:

$$\begin{aligned} & A\left[\alpha\left(\lambda K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(\lambda L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ = \quad & A\left\{\lambda^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(\lambda L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \lambda^1 Y_t. \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre sont obtenues en différenciant le profit par rappiort au capital et au travail et en annulant les dérivées partielles car de cette façon, la firme utilise une quantité de facteur permettant d'atteindre le profit le plus élevé (le profit prend la forme d'une courbe en cloche, la tangente à la fonction de profit a une pente nulle au sommet de Π_t):

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = R_t^K, \tag{70a}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t. \tag{70b}$$

Sous la condition de rendements d'échelle constants, le théorème d'Euler implique que la production est égale à la somme des contributions de chaque facteur de production:

$$Y_t \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} L_t.$$

L'hypothèse de concurrence parfaite sur les marchés des biens et des facteurs de production implique que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale:

$$Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t. \tag{71}$$

Donc le profit Π_t est nul.

4. Ecrivez l'équilibre sur le marché des biens et services en définissant au préalable l'investissement I_t. A l'aide des contraintes budgétaires des travailleurs jeunes à la date t et des retraités à la même date, déterminez la consommation totale $C_t = C_t^Y + C_t^O$. Montrez que l'équilibre sur le marché des biens et services a pour corollaire l'équilibre sur le marché des capitaux:

$$S\left(W_t\right) = K_{t+1}. \tag{72}$$

Réponse : L'investissement correspond à l'accumulation du capital nécessaire pour amener le capital à son niveau optimal $K_{t+1} - K_t$, et à l'investissement nécessaire pour remplacer les machines obsolètes δK_t:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t. \tag{73}$$

D'après l'équilibre sur le marché des biens et services, la production finale Y_t est égale la dépense finale composée de la consommation et de l'investissement I_t:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{74}$$

La consommation totale est composée de la consommation des travailleurs jeunes C_t^Y et des retraités C_t^O, La consommation des travailleurs jeunes est égale à la part du salaire qui n'est pas épargnée: $C_t^Y = W_t - S_t$. La consommation des retraités est égale au rendement du capital plus le capital net de la dépréciation $C_t^O = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t$ (ce sont les propriétaires de l'entreprise de location du capital). Comme la population $L_t = L$ est constante et normalisée à 1, la consommation totale C_t est égale à:

$$C_t = C_t^Y + C_t^O = W_t - S_t + R_t^K K_t + (1-\delta) K_t. \tag{75}$$

En utilisant le fait qu'en présence de rendements d'échelle constants, $Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, et en substituant (73) et (75) dans l'équilibre du marché des biens et services, et en utilisant le fait qu'à l'optimum, $S_t = S(W_t)$:

$$Y_t = R_t^K K_t + W_t L_t = W_t - S(W_t) + R_t^K K_t + (1-\delta) K_t + K_{t+1} - K_t + \delta K_t,$$

qui peut être réécrite comme (72) avec $S_t = K_{t+1}^S$ représentant le capital offert (ici ce n'est pas un flux, c'est un stock de richesse financière prenant la forme de capital qui est le seul actif) et K_{t+1}^D le capital demandé. Comme il y a équilibre sur le marché des capitaux, $K_{t+1}^D = K_{t+1}$ et donc $S(W_t) = K_{t+1}$.

5. En utilisant le fait que $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$, déterminez une expression du ratio W_t/K_t en fonction du capital K_t. Montrez que $\frac{W_t}{K_t}$ converge vers les valeurs suivantes lorque le capital prend des valeurs extrêmes:

$$\lim_{K_t \to 0} \frac{W_t}{K_t} = +\infty, \quad \lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0, \tag{76}$$

en utilisant le fait que $\sigma > 1$.

Réponse : D'après la condition du premier ordre (70b), $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t$. La productivité marginale du travail peut être écrite simplement en remarquant que $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} =$

$(1-\alpha)\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ avec la production par travailleur donnée par:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = A\left[\alpha\left(k_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \qquad (77)$$

où $k_t \equiv K_t/L_t$; comme $L_t = 1$, $k_t = K_t$. En utilisant $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ et (77), le ratio W_t/K_t en fonction du stock de capital:

$$\frac{W_t}{K_t} = (1-\alpha)\, A \frac{\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}}{K_t}. \qquad (78)$$

Pour déterminer la valeur de $\frac{W_t}{K_t}$ lorsque K_t tend vers zéro, il suffit de réécrire (78) de la façon suivante:

$$(1-\alpha)\, A\left[\alpha\left(K_t\right)^{-\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(K_t\right)^{-(\sigma-1)}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \qquad (79)$$

où $\left(K_t\right)^{-\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}} = \frac{1}{\left(K_t\right)^{\frac{(\sigma-1)^2}{\sigma}}}$ et $\left(K_t\right)^{-(\sigma-1)} = \frac{1}{\left(K_t\right)^{(\sigma-1)}}$. En utilisant le fait que $\sigma > 1$, on obtient que le ratio W_t/K_t converge vers les valeurs suivantes quand le capital prend des valeurs extrêmes:

$$\lim_{K_t \to 0} \frac{W_t}{K_t} = +\infty, \qquad \lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0.$$

Bien que le salaire s'élève à mesure que le capital augmente (car K élève la productivité marginale du travail), ces deux résultats montrent qu'à mesure que l'économie accumule du capital, le salaire augmente moins vite que le capital.

6. On note γ_t^K le taux de croissance du capital défini de la façon suivante $\gamma_t^K \equiv \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t}$. En utilisant (72) et la relation entre l'épargne et le salaire $S_t = S\left(W_t\right)$, montrez que le taux de croissance

$$\lim_{t \to \infty} \gamma_t^K = 0. \qquad (80)$$

En portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical, illustrez la convergence de l'économie vers l'équilibre de long terme. Expliquez la convergence vers une croissance nulle à long terme.

Réponse : D'après la fonction d'épargne (à l'optimum) décrite par (68), $S_t = \frac{1}{2+\rho} W_t$. En utilisant l'équilibre sur le marché des capitaux (72), et en divisant les membres de gauche et de droite par K_t, on obtient:

$$\frac{S_t}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\frac{W_t}{K_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}. \qquad (81)$$

D'après (76), $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0$ et donc

$$\lim_{K_t \to +\infty} \frac{K_{t+1}}{K_t} = 0.$$

Il s'ensuit à long terme, cad lorsque $t \to \infty$ (puisque l'économie accumule du capital à mesure que le temps passe):

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_t^K = 0. \tag{82}$$

La Figure 3 illustre la convergence de l'économie vers l'équilibre de long terme en portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical. La droite horizontale $\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$ représente le lieu des points où le capital est constant. Comme l'équation d'accumulation du capital $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho} \frac{W_t}{K_t}$ est décroissante à mesure que K_t augmente, il existe un état-stationnaire unique en E_0 associé à un stock de capital constant $\tilde{K}$ et donc une croissance nulle $\gamma_\infty^K = \frac{\tilde{K} - \tilde{K}}{\tilde{K}} = 0$.

L'existence d'une croissance nulle à long terme s'explique par le fait qu'à mesure que le capital augmente, le salaire s'élève mais moins vite que le capital si bien que l'épargne qui représente une fraction fixe du salaire diminue au cours du temps lorsqu'elle est rapportée au capital, c'est-à-dire $\frac{S_t}{K_t}$ converge progressivement vers la valeur d'état stationnaire $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{\tilde{K}}{\tilde{K}} = 1$. Pourtant, dans le modèle de Solow, l'existence d'une substituabilité entre le capital et le travail permet d'éviter l'extinction de la croissance car la technologie de production est suffisamment flexible pour permettre l'utilisation d'un stock de capital toujours plus grand par rapport au travail. La raison est qu'une fonction de production CES ouvre la voie à une technologie de production où il est toujours optimal d'utiliser davantage de capital, ce facteur de production devenant de moins en moins coûteux.

En revanche, dans le modèle à générations imbriquées, l'accumulation du capital se fait sur la seule base des revenus du travail; les travailleurs doivent constituer une épargne suffisamment élevée grâce à leur salaire pour à la fois rembourser le capital nette de sa dépréciation $(1 - \delta)\ .K_t$ aux retraités et investir un montant I_t, cad:

$$S_t = K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)\ .K_t.$$

A mesure que le stock de capital devient de plus en plus grand, les travailleurs jeunes doivent rembourser un stock de capital toujours plus grand de telle sorte que l'épargne engendrée par la hausse du salaire devient insuffisante puisque le salaire par unité de capital diminue à mesure que le capital augmente en raison de l'existence de rendements décroissants; la croissance s'éteint donc à long terme.

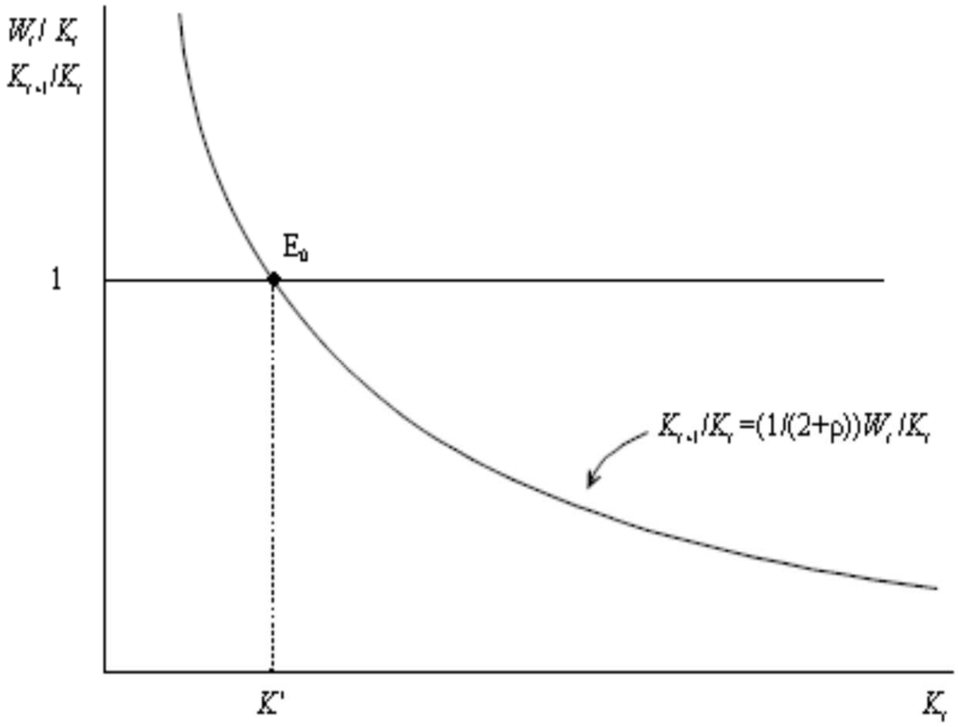

FIG. 3 – *Extinction de la croissance à long terme dans un modèle à générations imbriquées - Source : Chapitre 17, Heijdra, Reijnders, and Romp (2009) Foundations of Modern Macroeconomics Second Edition. Exercise and Solutions Manual. Oxford University Press.*

7. On suppose que pour remédier au problème d'extinction de la croissance économique à long terme, l'Etat met en place une taxe $0 < \tau < 1$ sur la valeur ajoutée Y_t. Les recettes fiscales sont reversées aux travailleurs jeunes sous la forme d'un transfert forfaitaire noté T_t^Y.

   (a) Ecrivez le budget de l'Etat.

   Réponse : Les recettes fiscales sont représentées par les recettes fiscales τY_t et les dépenses ont représentées par les transferts T_t^Y. Le budget équilibré s'écrit (en l'absence de dette):

$$\tau Y_t = T_t^Y. \tag{83}$$

   (b) Réécrivez le profit Π_t' et les conditions du premier ordre qui résultent de la résolution du programme de maximisation du profit.

   Réponse : Le profit de la firme correspond au chiffre d'affaires $P_t Y_t = Y_t$ moins les coûts représentés par la rémunération des facteurs de production:

$$\Pi_t' \equiv (1-\tau) F(K_t, L_t) - W_t L_t - R_t^K K_t. \tag{84}$$

   Les conditions du premier ordre sont obtenues en différenciant le profit par rapport au capital et au travail et en annulant les dérivées partielles:

$$\frac{\partial \Pi_t'}{\partial K_t} = 0, \quad (1-\tau)\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = R_t^K, \tag{85a}$$

$$\frac{\partial \Pi_t'}{\partial L_t} = 0, \quad (1-\tau)\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = W_t. \tag{85b}$$

   (c) Réécrivez la contrainte budgétaire à la date t de l'agent représentatif, puis la contrainte budgétaire intertemporelle. Résolvez le programme de maximisation intertemporelle de l'agent représentatif et déterminez les nouvelles expressions de la consommation C_t^Y et de l'épargne S_t.

   Réponse : La contrainte budgétaire de l'agent représentatif (61) lorsqu'il est un travailleur jeune devient:

$$C_t^Y + S_t = W_t + T_t^Y. \tag{86}$$

   La contrainte budgétaire (62) lorsqu'il est retraité est inchangée, cad $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1}) S_t$. En utilisant la contrainte budgétaire à la date $t+1$, $S_t = \frac{C_{t+1}^O}{(1+r_{t+1})}$, on élimine l'épargne de la contrainte budgétaire (86) ce qui conduit à la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t + T_t^Y. \tag{87}$$

En utilisant (87), $C_{t+1}^{O} = (1 + r_{t+1}) \left(W_t + T_t^Y - C_t^Y \right)$, on peut éliminer C_{t+1}^{O} de l'utilité intertemporelle (60):

$$\Lambda_t^Y \equiv \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho} \ln \left[(1 + r_{t+1}) \left(W_t + T_t^Y - C_t^Y \right) \right]. \tag{88}$$

En différentiant l'utilité intertemporelle par rapport à C_t^Y puis en annulant la dérivée première, on obtient l'égalité habituelle entre le taux marginal de substitution intertemporelle et le prix relatif de la consommation présente: $\frac{C_{t+1}^{O}(1+\rho)}{C_t^Y} = (1 + r_{t+1})$. Donc la condition du premier ordre (65) est inchangée. En utilisant (65), $C_{t+1}^{O} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} C_t^Y$, de façon à éliminer C_{t+1}^{O} de la contrainte budgétaire intertemporelle (87), on obtient la consommation de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t:

$$C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} \left(W_t + T_t^Y \right). \tag{89}$$

En substituant (89) dans la contrainte budgétaire à la date t (86), on obtient l'épargne de l'agent représentatif lorsqu'il est jeune en fonction du salaire W_t plus du transfert forfaitaire T_t^T:

$$S_t = W_t + T_t^Y - C_t^Y = \frac{1}{2+\rho} \left(W_t + T_t^Y \right). \tag{90}$$

(d) En déterminant au préalable l'expression des dépenses totales de consommation C_t, montrez à l'aide de la condition d'équilibre sur le marché des biens et services que la condition d'équilibre sur le marché des capitaux se modifie de la façon suivante:

$$S \left(W_t + T_t^Y \right) = K_{t+1}. \tag{91}$$

Réponse : En utilisant (86), la consommation des travailleurs jeunes devient $C_t^Y = W_t + T_t^Y - S_t$. La consommation des retraités est inchangée : $C_t^O = R_t^K K_t + (1-\delta) K_t$. En utilisant l'expression de l'investissement (73), cad $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$, et en utilisant l'équilibre sur le marché des biens et services (74), cad $Y_t = C_t + I_t$, on obtient:

$$Y_t - T_t^Y = W_t + R_t^K K_t + K_{t+1} - S \left(W_t + T_t^Y \right).$$

En utilisant la condition d'équilibre budgétaire de l'Etat (83) en en utilisant le fait que $(1-\tau) Y_t \equiv R_t^K K_t + W_t L_t$, l'équilibre sur le marché des biens et services est réécrit:

$$(1-\tau) Y_t = R_t^K K_t + W_t L_t = W_t + R_t^K K_t + K_{t+1} - S \left(W_t + T_t^Y \right),$$

ce qui donne l'équlibre sur le marché des capitaux (91).

(e) Montrez que l'équation d'accumulation du capital s'écrit maintenant de la façon suivante:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\left[\frac{W_t}{K_t} + \frac{\tau Y_t}{K_t}\right]. \tag{92}$$

Réponse : En substituant l'expression de l'épargne (90) dans la condition d'équilibre du marché des capitaux (91), et en divisant par le stock de capital K_t, on obtient:

$$\frac{1}{2+\rho}\frac{\left(W_t + T_t^Y\right)}{K_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}$$

(f) Déterminez l'expression de $\frac{Y_t}{K_t}$. Montrez que:

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t} = A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} > 0. \tag{93}$$

Puis montrez que l'accumulation du capital tend vers la valeur suivante lorsque le stock de capital devient très élevé:

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{A}{2+\rho}\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} > 0. \tag{94}$$

Réponse : En rapportant la production Y_t donnée par (59) au stock de capital K_t, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{K_t} &= A\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} + (1-\alpha)\left(L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= A\left[\alpha + \left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\end{aligned}$$

où la deuxième ligne a été obtenue en utilisant $L_t = 1$. Comme $\lim_{K_t\to\infty}\left(K_t\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} = 0$ lorsque $\sigma > 1$, on obtient (93). Puis en faisant tendre K_t vers l'infini dans l'expression (92), on obtient

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\lim_{K_t\to\infty}\frac{W_t}{K_t} + \frac{\tau}{2+\rho}\lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t}, \tag{95}$$

$$\frac{\tau}{2+\rho}A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}, \tag{96}$$

où la deuxième ligne a été obtenue en utilisant (93) et (76).

(g) Montrez qu'il existe deux situations selon que le terme donné par (94) est inférieur ou supérieur à 1. Illustrez ce résultat sur un graphique en portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical. Comment varie le taux de croissance à long terme avec le taux de taxe sur la valeur ajoutée τ ? Expliquez. Concluez en précisant les deux conditions permettant une croissance endogène.

Réponse : Nous allons montrer qu'il existe deux situations selon que le terme donné par (96) est inférieur ou supérieur à 1. Lorsque le capital atteint sa valeur de long terme, alors $K_{t+1} = K_t = \tilde{K}$. Ce lieu des points est représenté par la droite horizontale sur la Figure 4 d'ordonnée à l'origine égale à 1. Il va donc apparaître deux situations selon que la courbe d'accumulation du capital (ou d'épargne) coupe cette droite horizontale ou pas. Si elle la coupe, alors l'économie atteint une situation où le capital cesse de croître et $\gamma_{\infty}^{K} = \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = 0$. En revanche, si elle ne la coupe pas, alors $\gamma_{\infty}^{K} > 0$ puisque cela signifie que le capital ne va pas cesser d'augmenter à long terme. Cette situation est possible seulement si le rapport $\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1$. D'après (96), cela est vrai si le taux de taxe τ est sufisamment élevé:

$$\tau > \frac{2+\rho}{A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}}. \tag{97}$$

Le taux de taxe permettant une croissance endogène s'élève avec le taux de préférence pour le préférence pour le présent ρ car ce dernier réduit l'incitation à épargner. Le taux de taxe diminue avec l'élasticité de substitution entre travail et capital σ: plus la technologie de production est flexible, c'est-à-dire plus il est simple pour les entreprises de substituter le capital au travail à mesure que le capital augmente, plus le rapport Y/K sera élevé, et moins l'Etat aura besoin de taxer la valeur ajoutée car l'assiette fiscale Y/K est plus élevée quand σ prend des valeurs plus fortes.

On note $\gamma_{\infty}^{K} = \tilde{\gamma} = \frac{K_{t+1}}{K_t} - 1$ le taux de croissance du capital:

$$\frac{\tau}{2+\rho} A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} = 1 + \bar{\gamma}. \tag{98}$$

Tant que $\tilde{\gamma} > 0$, alors $\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1$ et la courbe décroissante d'accumulation du capital ne coupera jamais la droite horizontale $K_{t+1} = K_t$ et une croissance endogène, c'est-à-dire persistante avec $\gamma_{\infty}^{K} > 0$ est possible.

L'expression du taux de croissance (96) montre que la croissance s'élève avec le taux de taxe τ. L'explication est qu'un taux de taxe plus élevé permet un transfert forfaitaire T_t^Y plus important vers les travailleurs jeunes ce qui leur permet d'avoir une épargne plus forte et ainsi de financer une accumulation du capital perpétuelle. Le modèle préconise donc de redistribuer la richesse des plus âgés (les retraités) vers les plus jeunes (les travailleurs) pour soutenir l'épargne de ces derniers qui finance l'accumulation de capital. Ce transfert forfaitaire permet en fait de contrebalancer l'effet des rendements déccroissants dans l'accumulation du capital qui exerce un effet négatif sur la hausse du salaire (puisque l'on a toujours $\lim_{K_t\to\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0$).

L'expression du taux de croissance (96) montre que la croissance s'élève avec le taux de taxe τ. L'explication est qu'un taux de taxe plus élevé permet un

transfert forfaitaire T_t^Y plus important vers les travailleurs jeunes ce qui leur permet d'avoir une épargne plus forte et ainsi d'élever l'investissement: comme la production augmente avec le capital, l'économie devient plus riche. Le modèle préconise donc de redistribuer la richesse des plus âgés (les retraités) vers les plus jeunes (les travailleurs) pour soutenir l'épargne de ces derniers qui finance l'accumulation de capital. Ce transfert forfaitaire permet en fait de contrebalancer le fait que les revenus du travail diminuent relativement aux revenus du capital (puisque l'on a toujours $\lim_{K_t\to\infty}\frac{W_t}{K_t}=0$).

En conclusion, la possibilité d'une croissance à long terme repose sur deux piliers: i) une fonction de production à élasticité de substitution constante est nécessaire car à mesure que le capital augmente, le capital devient plus abondant et donc le travail relativement rare; si la technologie de production ne permet pas de substituer aisément le capital au ravail, la croissance s'eteindra en raison de la rareté du travail; dit autrement, à mesure que le capital augmente, le coût du travail s'élève et le coût du capital diminue et il faut que la firme ait la possibilité d'utiliser plus intensivement du capital au cours du temps (avec une Cobb-Douglas, la croissance s'éteint) à mesure que son coût diminue. Le deuxième élément a trait à ii) la redistribution des capitalistes (c'est-à-dire des retraités) vers les travailleurs car comme les salaires augmentent moins vite que le capital, au bout d'un moment, l'épargne sera insuffisante pour financer l'accumulation du capital car seuls les travailleurs jeunes épargnent. Parallèlement, les capitalistes obtiennent une rémunération positive à long terme puisque:

$$\lim_{K_t\to\infty} R_t = \lim_{K_t\to\infty}\frac{Y_t}{K_t} = A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)},$$

ce qui implique que les revenus du capital s'élèvent sans cesse au-desssus de ceux du travail:

$$\lim_{K_t\to\infty}\frac{R_tK_t}{W_t} = \lim_{K_t\to\infty}\frac{R_t}{\frac{W_t}{K_t}} = +\infty.$$

Dans le modèle de Solow, l'existence d'une fonction à élasticité de substitution constante avec $\sigma > 1$ permet d'assurer une croissance persistante en empêchant l'extinction de la rémunération du capital grâce à la flexibilité de la technologie de production qui permet à l'entreprise d'utiliser toujours plus de capital ce qui n'est pas le cas avec une fonction Cobb-Douglas. En revanche, dans un modèle à générations imbriquées, cette condition n'est pas suffisante car les capitalistes consomment le capital au lieu de l'accumuler. Pour contrebalancer cette décroissance de W/K, il est nécessaire de fournir un revenu supplémentaire

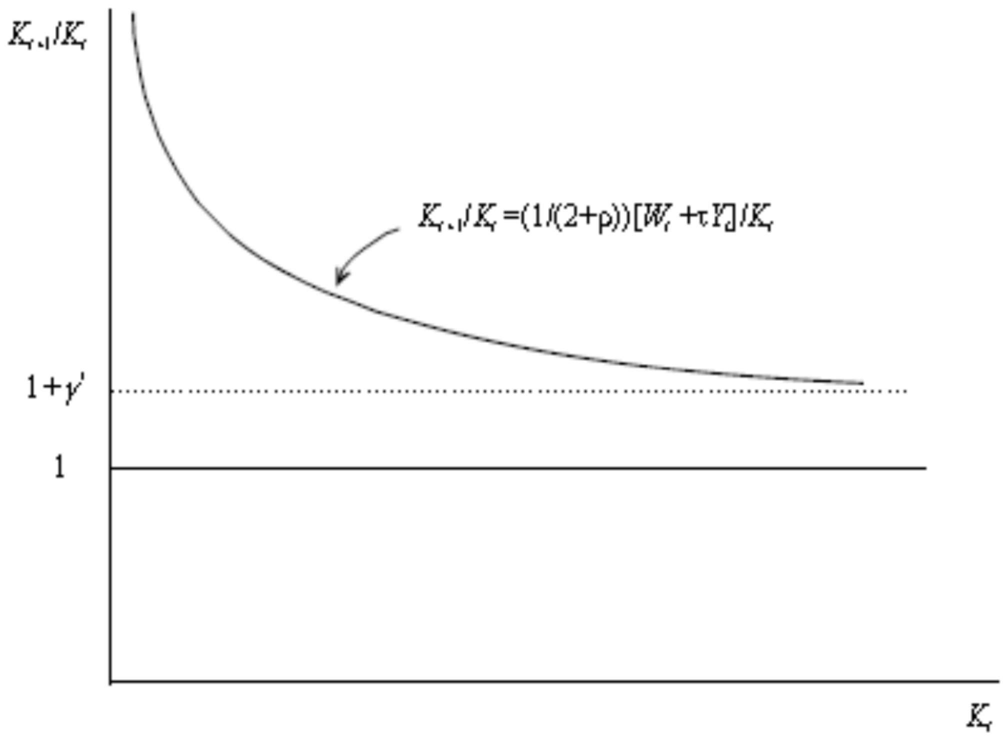

FIG. 4 – *Croissance endogène dans un modèle à générations imbriquées - Source : Chapitre 17, Heijdra, Reijnders, and Romp (2009) Foundations of Modern Macroeconomics Second Edition. Exercise and Solutions Manual. Oxford University Press.*

au jeune $\tau \times Y/K$ qui permet de maintenir le rapport S/K constant à long terme. Cette épargne permet d'investir et de rembourser le capital aux plus âgés à chaque période:

$$S_t = I_t + (1 - \delta) \ .K_t.$$