Cours de Olivier Cardi
Université de Tours
Cours d'Économie Avancée, M1
Année universitaire 2016-2017

TD 1 : Décisions intertemporelles dans le modèle à deux périodes et à générations imbriquées

1 Questions de cours

Répondez aux questions suivantes :

1. Définissez le taux d'intérêt nominal i. Définissez le taux d'intérêt réel r en notant π le taux d'inflation. Donnez la relation entre ces deux grandeurs en expliquant.
2. Donnez la signification du concept de valeur actualisée.
3. Définissez l'avantage marginal. Expliquez la raison de la décroissance de l'avantage marginal à mesure que la consommation d'un bien augmente. Comment mesure-t-on le prix subjectif de la consommation présente ? En notant $U(C_1,C_2)$ l'utilité intertemporelle avec C_1 la consommation présente et C_2 la consommation future, définissez le taux marginal de substitution intertemporelle. Expliquez pourquoi le taux marginal de substitution intertemporelle diminue dans le plan (C_1,C_2) à mesure que la consommation C_1 augmente.
4. Définissez le taux de préférence pour le présent; définissez l'élasticité de substitution intertemporelle.
5. Comment varie l'épargne lorsque le revenu de la période courante augmente ? Même question lorsque l'individu anticipe une hausse du revenu futur ? Quel est l'effet d'une hausse du taux d'intérêt sur l'épargne ?

2 Exercice : Choix d'épargne dans un modèle à deux périodes

On considère un consommateur qui vit deux périodes notées 1 et 2. Il dispose d'un revenu R_1 à la première période et d'un revenu anticipé R_2^a à la deuxième période. Etant donné le prix à la première période P_1 et le prix anticipé P_2^a à la deuxième période, l'agent doit décider de la répartition entre consommation présente C_1 et épargne E. A la deuxième période, l'agent économique dispose d'une revenu anticipé R_2^a et du montant de l'épargne accumulé lors de la période précédente plus les intérêts, et consomme une quantité de biens C_2. L'agent économique tire une satisfaction $U(C_1,C_2)$ de sa consommation à la première et à la deuxième période. On suppose enfin que l'agent économique peut prêter ou emprunter autant qu'il le souhaite au taux d'intérêt nominal i.

1. Ecrire les équations budgétaires pour la période 1 et la période 2 (anticipée).
2. Déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle en valeur nominale. En notant π_2^a le taux d'inflation d'anticipé, r le taux le taux d'intérêt réel, et W la richesse réelle, montrez que la contrainte budgétaire intertemporelle peut être réécrite sous la forme suivante:
$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = R_1 + \frac{R_2^a}{1+r}. \tag{1}$$
3. Ecrivez le programme de maximisation du consommateur en éliminant C_2 de l'utilité intertemporelle $U(C_1,C_2)$ en utilisant (1). Déterminez la condition du premier ordre. Interprétez en indiquant ce que représentent les termes U_1'/U_2' et $(1+r)$. Tracez la courbe d'indifférence et la contrainte budgétaire (1) sur un graphique dans le plan (C_1,C_2) et montrez le point choisi par le consommateur.
4. Définissez le concept de taux de préférence pour le présent noté ρ de manière analytique. Identifiez le taux de préférence pour le présent de manière graphique. Interprétez ce concept de manière économique. On suppose que l'utilité intertemporelle prend la forme suivante:
$$\ln C_1 + \frac{\ln C_2}{1+\delta}, \tag{2}$$
où δ est le taux d'escompte psychologique. Dites ce que représente le terme $\beta \equiv \frac{1}{1+\delta}$. Déterminez l'expression du taux de préférence pour le présent.
5. En utilisant la condition du premier ordre et l'utilité intertemporelle (2), montrez que la consommation présente C_1 est égale à:
$$C_1 = \left(\frac{1+\delta}{2+\delta}\right) W. \tag{3}$$
En supposant que $R_1 = R_2^a = R$, montrez que le montant d'épargne E est donné par:
$$E = \frac{(r-\delta)}{(1+r)(2+\delta)} \times R. \tag{4}$$
Identifiez les situations de prêteur puis d'emprunteur de manière graphique selon la forme de la courbe d'indifférence.

6. Etudiez l'effet d'une hausse du taux d'intérêt $dr > 0$ sur l'épargne à la fois de manière analytique en utilisant (4) et de manière graphique.
7. On suppose que la fonction d'utilité U s'écrit $U = C_1 C_2$. Résoudre le programme d'optimisation dans ce cas particulier.
8. Que se passe-t-il si le taux d'intérêt créditeur r_1 est inférieur au taux d'intérêt débiteur r_2 ?

3 Exercice : Les effets de la dette publique dans le modèle de générations imbriquées

L'économie est composée d'un ménage représentatif et d'une firme représentative. On suppose que les individus vivent deux périodes. Au cours de la première période, ils travaillent puis au cours de la deuxième période, ils sont à la retraite. On suppose l'absence d'héritage et la population croît à un taux constant n. L'agent représentatif choisit ses niveaux de consommation lorsqu'il est jeune C_t^Y puis âgé C_{t+1}^O de façon à obtenir l'utilité intertemporelle la plus élevée:

$$\Lambda_t \equiv \ln\left(C_t^Y\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \ln\left(C_{t+1}^O\right). \tag{5}$$

Le paramètre $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent. Lors de la première période, l'individu offre une unité de travail et reçoit un salaire W_t qui est dépensé en biens de consommation C_t^Y, le reste étant épargné S_t. Lors de la deuxième période, l'individu ne travaille pas mais reçoit les revenus d'intérêt de son épargne $r_{t+1}S_t$. L'individu âgé consacre intégralement le principal et les revenus d'intérêt à sa consommation C_{t+1}^O. Les contraintes budgétaires des ménages s'écrivent donc de la façon suivante:

$$\begin{aligned} C_t^Y + S_t &= W_t, & \text{(6a)} \\ C_{t+1}^O &= \left(1 + r_{t+1}\right) S_t. & \text{(6b)} \end{aligned}$$

Le bien final est produit par la firme représentative en utilisant du capital K_t et du travail L_t selon une technologie de production de type Cobb-Douglas qui s'écrit de la façon suivante sous forme intensive:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = k_t^{1-\epsilon_L}, \quad 0 < \epsilon_L < 1. \tag{7}$$

Le coût d'une unité de travail est égal au salaire W_t et le coût d'une unité de capital est égal à R_t^K. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise à 1, le bien final étant le numéraire. On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite.

On cherche à étudier l'impact de la dette publique dans le modèle Diamond-Samuelson.

1. On note G_t les dépenses publiques, B_t et B_{t+1} la dette publique aux dates t et $t+1$; le taux d'intérêt sur la dette publique est r_t. On désigne par T_t^Y et T_t^O l'impôt forfaitaire prélevé sur les travailleurs jeunes et les retraités. Ecrire la contrainte budgétaire de l'Etat.

2. En notant $g_t \equiv G_t/L_t$, $b_t \equiv B_t/L_t$ les dépenses publiques et la dette publique par habitant, montrer que la contrainte budgétaire peut s'écrire:

$$g_t + (1 + r_t)\, b_t = T_t^Y + \frac{T_t^O}{1+n} + (1+n)\, b_{t+1}. \tag{8}$$

3. Réécrire les contraintes budgétaires (6) en prenant en compte le prélèvement d'un impôt forfaitaire T_t^j (avec $j = Y,O$). Ecrire la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent représentatif. Déterminer les choix de consommation C_t^Y et C_{t+1}^O permettant d'atteindre l'utilité intertemporelle (11) la plus élevée possible sous la contrainte budgétaire intertemporelle. Montrer que l'épargne optimale, S_t, s'écrit:

$$S_t = \frac{1}{2+\rho}\left(W_t - T_t^Y\right) + \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{T_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}. \tag{9}$$

   Comment varie l'épargne avec l'impôt présent T_t^Y et l'impôt futur T_{t+1}^O? Expliquer.

4. Ecrire le profit de la firme représentative noté Π_t. Montrer que la fonction de production $Y_t = (L_t)^{\epsilon_L} (K_t)^{1-\epsilon_L}$ est à rendements d'échelle constants. Déterminer les conditions du premier ordre. Montrez que le coût du capital R_t^K est égal à $r_t + \delta$, où δ est le taux de dépréciation du capital, en utilisant une simple relation d'arbitrage. Montrer que la production est intégralement consacrée à la rémunération des facteurs de production. Comment varient le taux d'intérêt r_t et le salaire W_t avec le stock de capital par travailleur $k_t \equiv K_t/L_t$?

5. Ecrire l'équilibre sur le marché des biens et services en définissant au préalable l'investissement I_t. A l'aide des contraintes budgétaires des travailleurs jeunes à la date t et des retraités à la même date, déterminer la consommation totale $C_t = L_t C_t^Y + L_{t-1} C_t^O$. Montrer que l'équilibre sur le marché des biens et services a pour corollaire l'équilibre sur le marché des capitaux:

$$S_t = (1+n) \times (k_{t+1} + b_{t+1}). \tag{10}$$

6. On étudie les effets d'un accroissement des dépenses publiques g_t. A cette fin, on suppose que la dette de l'Etat est nulle ($b_t = b_{t+1} = 0$), et on considère que les dépenses publiques supplémentaires sont financées par un impôt forfaitaire payé par les travailleurs jeunes, c'est-à-dire $dg_t = dT_t^Y$, l'impôt forfaitaire payé par les retraités étant maintenu constant, $T_t^O = T^O$. En utilisant (18), déterminer l'équation d'accumulation du capital et montrer que la convergence vers l'équilibre de long terme est stable. Déterminer les effets à court terme et à long terme d'une hausse de g sur k_{t+1}.
7. On suppose que l'Etat décide de supprimer l'impôt forfaitaire prélevé sur le revenu des retraités: $T^O = 0$. Par ailleurs, l'Etat maintient la dette publique par habitant constante, $b_t = b_{t+1} = b$. On suppose que $r_t > n$. Montrer qu'un accroissement de la dette publique conduit à une réduction du stock de capital par travailleur à court terme et à long terme.

4 Exercice : Croissance économique dans un modèle à générations imbriquées

On considère que l'économie est constituée à chaque date t de travailleurs (individus jeunes) et de retraités (individus âgés). Lorsqu'il est jeune à la date t, l'agent représentatif travaille et obtient en contrepartie un salaire W_t qu'il répartit entre consommation C_t^Y qui lui procure une utilité instantanée $\ln C_t^Y$, et épargne S_t. Puis une fois retraité, l'agent représentatif a un revenu qui correspond à son épargne S_t plus le rendement des fonds épargnés. Les retraités sont propriétaires du capital et l'épargne est donc rémunéré au taux r_{t+1} qui est déterminé par la productivité marginale du capital nette de la dépréciation du capital δ. On suppose l'absence de croissance de la population. On normalise la population totale à 1, cad $L_t = L_{t-1} = L = 1$.

La firme représentative utilise du travail L_t et du capital K_t pour produire un bien final en quantité Y_t. Le coût d'une unité de travail est égal au salaire W_t et le coût d'une unité de capital est égal à R_t^K. Les facteurs de production sont combinés selon une technologie de production à élasticité de substitution constante:

$$F\left(K_t, L_t\right) = A\left[\alpha\left(K_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{11}$$

où le paramètre σ est supposé supérieur à 1. La production du bien final Y_t est vendue au prix P_t que l'on normalise 1, le bien final étant le numéraire. On considère que les marchés des biens et services et des facteurs de production sont en concurrence parfaite.

1. On note ρ le taux d'escompte physchologique. Ecrivez la fonction d'utilité intertemporelle et les contraintes budgétaires de l'agent représentatif à la date t et à la date $t+1$.
2. Ecrivez la contrainte budgétaire intertemporelle. Déterminez les conditions du premier ordre du programme de maximisation de l'agent représentatif. Vérifiez que la consommation C_t^Y augmente avec le taux de préférence pour le présent et que l'épargne S_t augmente avec ρ. Exprimées les consommations permettant d'atteindre l'utilité intertemporelle la plus élevée possible ainsi que l'épargne en fonction du salaire W_t. Montrez que l'élasticité de substitution intertemporelle σ_t^j (avec $j = Y,O$) est égale à 1. Explique la raison pour laquelle l'épargne est indépendante du taux d'intérêt.
3. Ecrivez le profit de la firme représentative noté Π_t. Montrez que la fonction de production (11) est à rendements d'échelle constants. Déterminez les conditions du premier ordre. Montrez que la production est intégralement consacrée à la rémunération des facteurs de production.
4. Ecrivez l'équilibre sur le marché des biens et services en définissant au préalable l'investissement I_t. A l'aide des contraintes budgétaires des travailleurs jeunes à la date t et des retraités à la même date, déterminez la consommation totale $C_t = C_t^Y + C_t^O$. Montrez que l'équilibre sur le marché des biens et services a pour corollaire l'équilibre sur le marché des capitaux:

$$S\left(W_t\right) = K_{t+1}. \tag{12}$$

5. En utilisant le fait que $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$, déterminez une expression du ratio W_t/K_t en fonction du capital K_t. Montrez que $\frac{W_t}{K_t}$ converge vers les valeurs suivantes lorque le capital prend des valeurs extrêmes:

$$\lim_{K_t \to 0} \frac{W_t}{K_t} = +\infty, \quad \lim_{K_t \to +\infty} \frac{W_t}{K_t} = 0, \tag{13}$$

en utilisant le fait que $\sigma > 1$.
6. On note γ_t^K le taux de croissance du capital défini de la façon suivante $\gamma_t^K \equiv \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t}$. En utilisant (12) et la relation entre l'épargne et le salaire $S_t = S\left(W_t\right)$, montrez que le taux de croissance

$$\lim_{t \to \infty} \gamma_t^K = 0. \tag{14}$$

En portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical, illustrez la convergence de l'économie vers l'équilibre de long terme. Expliquez la convergence vers une croissance nulle à long terme.

7. On suppose que pour remédier au problème d'extinction de la croissance économique à long terme, l'Etat met en place une taxe $0 < \tau < 1$ sur la valeur ajoutée Y_t. Les recettes fiscales sont reversées aux travailleurs jeunes sous la forme d'un transfert forfaitaire noté T_t^Y.
   (a) Ecrivez le budget de l'Etat.
   (b) Réécrivez le profit Π_t' et les conditions du premier ordre qui résultent de la résolution du programme de maximisation du profit.
   (c) Réécrivez la contrainte budgétaire à la date t de l'agent représentatif, puis la contrainte budgétaire intertemporelle. Résolvez le programme de maximisation intertemporelle de l'agent représentatif et déterminez les nouvelles expressions de la consommation C_t^Y et de l'épargne S_t.
   (d) En déterminant au préalable l'expression des dépenses totales de consommation C_t, montrez à l'aide de la condition d'équilibre sur le marché des biens et services que la condition d'équilibre sur le marché des capitaux se modifie de la façon suivante:
   $$S\left(W_t + T_t^Y\right) = K_{t+1}. \tag{15}$$
   (e) Montrez que l'équation d'accumulation du capital s'écrit maintenant de la façon suivante:
   $$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{1}{2+\rho}\left[\frac{W_t}{K_t} + \frac{\tau Y_t}{K_t}\right]. \tag{16}$$
   (f) Déterminez l'expression de $\frac{Y_t}{K_t}$. Montrez que:
   $$\lim_{K_t\to\infty} \frac{Y_t}{K_t} = A\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} > 0. \tag{17}$$
   Puis montrez que l'accumulation du capital tend vers la valeur suivante lorsque le stock de capital devient très élevé:
   $$\lim_{K_t\to\infty} \frac{K_{t+1}}{K_t} = \tau\frac{A}{2+\rho}\alpha^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} > 0. \tag{18}$$
   (g) Montrez qu'il existe deux situations selon que le terme donné par (18) est inférieur ou supérieur à 1. Illustrez ce résultat sur un graphique en portant K_t sur l'axe horizontal et $\frac{K_{t+1}}{K_t}$ sur l'axe vertical. Comment varie le taux de croissance à long terme avec le taux de taxe sur la valeur ajoutée τ? Expliquez. Concluez en précisant les deux conditions permettant une croissance endogène.